

Matematyka
Granica Funkcji

Aleksander Denisiuk

denisjuk@euh-e.edu.pl

Elbląska Uczelnia Humanistyczno-Ekonomiczna

ul. Lotnicza 2

82-300 Elbląg

Granica Funkcji

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

<http://denisjuk.euh-e.edu.pl/>

Pojęcie funkcji

Definicja 1. Jeżeli każdemu elementowi zbioru X jest przyporządkowany element zbioru Y , wówczas określona jest funkcja $f : X \rightarrow Y$, $x \mapsto y = f(x)$. Zbiór X nazywa się *dziedziną funkcji*. Zbiór Y nazywa się *zbiorem wartości (przeciwdziedziną) funkcji*.

Przykłady

Przykład 2. • Ciąg rzeczywisty jest funkcją $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$

- $x^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$
- $\sqrt{\cdot} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$
- kurs walut

Definicja Heinego

Niech dana będzie funkcja $f(x)$ określona w sąsiedztwie punktu a .

Definicja 3. Liczba b nazywa się *granica* funkcji $y = f(x)$ w punkcie a , jeżeli dla dowolnego ciągu $\{a_n\}$ zbieżnego do a i takiego, że $a_n \neq a$ dla $n = 1, 2, 3 \dots$ ciąg $\{f(a_n)\}$ jest zbieżny do b . Oznaczenie:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{lub} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b.$$

Definicja Cauchy'ego

Definicja 4. Liczba b nazywa się *granica* funkcji $y = f(x)$ w punkcie a , jeżeli dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$, taka że

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Definicja 5. Liczba b nazywa się *granica* funkcji $y = f(x)$ w punkcie a , jeżeli dla dowolnego otoczenia V punktu b istnieje takie sąsiedztwo U punktu a (i. e. $U = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$), że $f(U) \subset V$.

Uwaga 6. Funkcja $f(x)$ może nie być określona w punkcie a .

Równoważność dwóch definicji

Twierdzenie 7. *Definicje 3 i 4 są równoważne.*

Dowód. • \Leftarrow

• \Rightarrow

□

Przykład 8. 1. $f(x) = c$

2. $f(x) = x$

3. Funkcja Dirichleta $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Granice jednostronne

Definicja 9 (Heine). Liczba b jest *prawostronną (lewostronną) granicą* funkcji $f(x)$ w punkcie a , jeżeli dla dowolnego ciągu $\{a_n\}$ o wyrazach większych (mniejszych) od a i zbieżnego do a ciąg $\{f(a_n)\}$ jest zbieżnym do b .

Oznaczenie:

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = b \left(\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = b \right) \quad \text{lub} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a+} b \left(f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a-} b \right).$$

Definicja 10 (Cauchy). Liczba b jest *prawostronną (lewostronną) granicą* funkcji $f(x)$ w punkcie a , jeżeli dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$, taka że $\forall x : a < x - a + \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$
($\forall x : a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$).

Definicja 11 (Cauchy). Liczba b nazywa się *prawostronną (lewostronną) granicą* funkcji $y = f(x)$ w punkcie a , jeżeli dla dowolnego otoczenia V punktu b istnieje takie *prawe (lewe) sąsiedztwo* U punktu a (i. e. $U = (a, a + \delta)$, odpowiednio $U = (a - \delta, a)$), że $f(U) \subset V$.

Równoważność definicji

Twierdzenie 12. *Definicje 9 i 10 są równoważne.*

Przykład 13. $\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sign } x = 1,$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sign } x = -1.$

Twierdzenie 14. $f(x)$ ma granicę w punkcie $a \iff$ istnieją i są równe sobie granice lewostronna i prawostronna.

Granice w otoczeniu nieskończoności

Definicja 15 (Heine). Liczba b jest *granica funkcji* $f(x)$ przy $x \rightarrow \infty$, jeżeli dla dowolnego nieskończenie dużego ciągu $\{a_n\}$ ciąg $\{f(a_n)\}$ jest zbieżnym do b . Oznaczenie:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad \text{lub} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} b.$$

Definicja 16 (Cauchy). Liczba b jest *granica funkcji* $f(x)$ przy $x \rightarrow \infty$, jeżeli dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $A > 0$, taka że $\forall x : |x| > A \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Definicja 17 (Cauchy). Liczba b nazywa się *granica funkcji* $f(x)$ przy $x \rightarrow \infty$, jeżeli dla dowolnego otoczenia V punktu b istnieje takie *otoczenie nieskończoności* U , że $f(U) \subset V$.

Twierdzenie 18. *Definicje 15 i 16 są równoważne.*

Jednostronne granice w otoczeniu nieskończoności

Definicja 19 (Heine). Liczba b jest *granica funkcji* $f(x)$ przy $x \rightarrow \pm\infty$, jeżeli dla dowolnego nieskończenie dużego ciągu $\{a_n\}$ o wyrazach dodatnich (ujemnych) ciąg $\{f(a_n)\}$ jest zbieżnym do b . Oznaczenie:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \quad \text{lub} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} b.$$

Definicja 20 (Cauchy). Liczba b jest *granica funkcji* $f(x)$ przy $x \rightarrow \pm\infty$, jeżeli dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $A > 0$, taka że $\forall x : x > A$ (odpowiednio $x < -A$) $\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Definicja 21 (Cauchy). Liczba b nazywa się *granica funkcji* $f(x)$ przy $x \rightarrow \pm\infty$, jeżeli dla dowolnego otoczenia V punktu b istnieje takie *otoczenie plus nieskończoności* (odpowiednio *minus nieskończoności*) U , że $f(U) \subset V$.

Twierdzenie 22. Definicje 19 i 20 są równoważne.

Przykłady

Przykład 23. • $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0,$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sign}(x) = 1,$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sign}(x) = -1.$

Kryterium Cauchy'ego

Twierdzenie 24. *Funkcja $f(x)$ ma w punkcie a granicę \iff*

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, takie że

$\forall x_1, x_2 : |x_1 - a| < \delta, |x_2 - a| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Działania a granicy

Twierdzenie 25. *Przy założeniu, że granice $\lim f(x)$ i $\lim g(x)$ istnieją, mają miejsce wzory:*

- $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x),$
- $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x),$
- $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)},$ o ile $\lim g(x) \neq 0,$
- $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim f(x) \leq \lim g(x),$
- $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ i $\lim f(x) = \lim g(x) \Rightarrow \lim h(x) = \lim f(x) = \lim g(x).$

Dowód. Wynika z właściwości zbieżnych ciągów. □

Wnioski

Wniosek 26. • Niech $P(x)$ będzie wielomianem. Wtedy

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a).$$

• Niech $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ będzie funkcją wymierną, przy czym $Q(a) \neq 0$.

Wtedy $\lim_{x \rightarrow a} R(x) = R(a)$.

Funkcje nieskończenie małe

Definicja 27. Funkcja $\alpha(x)$ nazywa się *nieskończenie małą* przy $x \rightarrow a$, jeżeli $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$. Oznaczenie: $\alpha(x) = o(1)$ przy $x \rightarrow a$.

Przykład 28. • $(x - a)^n = o(1)$ przy $x \rightarrow a$.

• Jeżeli $\lim_{x \rightarrow a} = b$, to funkcja $f(x) = b + o(1)$ przy $x \rightarrow a$.

Uwaga 29. W definicji 27 może być $x \rightarrow a\pm$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \pm\infty$.

Funkcje nieskończenie duże

Definicja 30 (Heine). Funkcja $f(x)$ nazywa się *nieskończenie dużą* przy $x \rightarrow a$, jeżeli dla dowolnego ciągu $\{a_n\}$ o wyrazach różnych od a ciąg wartości funkcji $\{f(a_n)\}$ jest nieskończenie dużym. Oznaczenie:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

Definicja 31 (Cauchy). Funkcja $f(x)$ nazywa się *nieskończenie dużą* przy $x \rightarrow a$, jeżeli dla dowolnej liczby $N > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że $\forall x : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > N$.

Definicja 32 (Cauchy). Funkcja $f(x)$ nazywa się *nieskończenie dużą* przy $x \rightarrow a$, jeżeli dla dowolnego otoczenia nieskończoności V istnieje takie sąsiedztwo U punktu a , że $f(U) \subset V$.

Twierdzenie 33. *Definicje 30 i 31 są równoważne.*

Funkcje nieskończenie duże. Cd

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a \pm} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow a \pm} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Przykład 34. • $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$

Rząd funkcji

Definicja 35. Niech dane będą $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ — dwie funkcje określone przy $x \rightarrow a$. Wówczas

- $\alpha(x) = o(\beta(x))$ przy $x \rightarrow a$, jeżeli istnieje taka nieskończenie mała przy $x \rightarrow a$ funkcja $\varepsilon(x)$, że $|\alpha(x)| \leq \varepsilon(x)|\beta(x)|$ przy $x \rightarrow a$.
- $\alpha(x) = O(\beta(x))$ przy $x \rightarrow a$, jeżeli istnieje taka stała $C \in \mathbb{R}$, że $|\alpha(x)| \leq C|\beta(x)|$ przy $x \rightarrow a$.
- $\alpha(x) \sim \beta(x)$ przy $x \rightarrow a$, jeżeli przy $x \rightarrow a$ jednocześnie $\alpha(x) = O(\beta(x))$ i $\beta(x) = O(\alpha(x))$.

Uwaga 36. W definicji 35 może być $x \rightarrow a\pm$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \pm\infty$.

Rząd funkcji. Cd

Twierdzenie 37. • Jeżeli $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, to $\alpha(x) = o(\beta(x))$ przy $x \rightarrow a$.

• Jeżeli istnieje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$, to $\alpha(x) = O(\beta(x))$ przy $x \rightarrow a$.

Przykład 38. • $x^3 - x^5 \sim x^3$ przy $x \rightarrow 0$,

• $\frac{5}{x-1} \sim \frac{1}{x}$ przy $x \rightarrow +\infty$,

• $\sqrt{1-x^2} = O(\sqrt{1-x})$ przy $x \rightarrow 1-$.

Asymptoty pionowe

Definicja 39. Prosta $x = a$ jest

1. (obustronną) pionową asymptotą funkcji $f(x)$, jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$
2. lewostronną pionową asymptotą funkcji $f(x)$, jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$
3. prawostronną pionową asymptotą funkcji $f(x)$, jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$

Asymptoty poziome

Definicja 40. Prosta $y = b$ jest

1. (obustronną) poziomą asymptotą funkcji $f(x)$, jeżeli $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$
2. lewostronną poziomą asymptotą funkcji $f(x)$, jeżeli $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$
3. prawostronną poziomą asymptotą funkcji $f(x)$, jeżeli $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$

Asymptoty ukośne

Definicja 41. Prosta $y = ax + b$ jest

1. (obustronną) ukośną asymptotą funkcji $f(x)$, jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \iff f(x) = ax + b + o(1)$$

2. lewostronną ukośną asymptotą funkcji $f(x)$, jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \iff f(x) = ax + b + o(1)$$

3. prawostronną ukośną asymptotą funkcji $f(x)$, jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \iff f(x) = ax + b + o(1)$$