Matematyka

Granica Funkci

Aleksander Denisiuk

`denisjuk@euh-e.edu.pl`

Elbląska Uczelnia Humanistyczno-Ekonomiczna

ul. Lotnicza 2

82-300 Elbląg

Granica Funkci

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

`http://denisjuk.euh-e.edu.pl/`

Pojecie funkcji

Definicja 1. Jeżeli każdemu elementowi zbioru X jest przyporządkowany element zbioru Y, wówczas określona jest funkcja $f : X \to Y$, $x \mapsto y = f(x)$. Zbiór X nazywa się *dziedziną funkcji*. Zbiór Y nazywa się *zbiorem wartości (przeciwdziedziną) funkcji*.

Przyklady

Przykład 2.

- Ciąg rzeczywisty jest funkcją $\mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n$
- $x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$
- $\sqrt{\ } : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$
- kurs walut

Definicja Heinego

Niech dana będzie funkcja $f(x)$ określona w *sąsiedztwie* punktu a.

Definicja 3. Liczba b nazywa się *granicą* funkcji $y = f(x)$ w punkcie a, jeżeli dla dowolnego ciągu $\{ a_n \}$ zbieżnego do a i takiego, że $a_n \neq a$ dla $n = 1, 2, 3 \ldots$ ciąg $\{ f(a_n) \}$ jest zbieżny do b. Oznaczenie:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{lub} \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b.$$

Definicja Cauchy'ego

Definicja 4. Liczba b nazywa się *granicą* funkcji $y = f(x)$ w punkcie a, jeżeli dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$, taka że $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Definicja 5. Liczba b nazywa się *granicą* funkcji $y = f(x)$ w punkcie a, jeżeli dla dowolnego otoczenia V punktu b istnieje takie *sąsiedztwo* U punktu a (i. e. $U = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$), że $f(U) \subset V$.

Uwaga 6. Funkcja $f(x)$ może nie być określona w punkcie a.

Równoważność dwóch definicji

Twierdzenie 7. *Definicje 3 i 4 są równoważne.*

Dowód.

- $\Leftarrow$
- $\Rightarrow$

$\square$

Przykład 8.

1. $f(x) = c$
2. $f(x) = x$
3. Funkcja Dirichleta $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Granice jednostronne

Definicja 9 (Heine)**.** Liczba b jest *prawostronną (lewostronną) granicą* funkcji $f(x)$ w punkcie a, jeżeli dla dowolnego ciągu $\{ a_n \}$ o wyrazach większych (mniejszych) od a i zbieżnego do a ciąg $\{ f(a_n) \}$ jest zbieżnym do b.
Oznaczenie:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = b \left(\lim_{x \to a-} f(x) = b \right) \quad \text{lub} \quad f(x) \underset{x \to a+}{\to} b \left(f(x) \underset{x \to a-}{\to} b \right).$$

Definicja 10 (Cauchy)**.** Liczba b jest *prawostronną (lewostronną) granicą* funkcji $f(x)$ w punkcie a, jeżeli dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$, taka że $\forall x : a < x - a + \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$ ($\forall x : a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$).

Definicja 11 (Cauchy)**.** Liczba b nazywa się *prawostronną (lewostronną) granicą* funkcji $y = f(x)$ w punkcie a, jeżeli dla dowolnego otoczenia V punktu b istnieje takie *prawe (lewe) sąsiedztwo* U punktu a (i. e. $U = (a, a + \delta)$, odpowiednio $U = (a - \delta, a)$), że $f(U) \subset V$.

Równoważność definicji

Twierdzenie 12. *Definicje 9 i 10 są równoważne.*

Przykład 13. $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

1. $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{sign} x = 1,$
2. $\lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{sign} x = -1.$

Twierdzenie 14. $f(x)$ *ma granicę w punkcie* $a \iff$ *istnieją i są równe sobie granice lewostronna i prawostronna.*

Granice w otoczeniu nieskończoności

Definicja 15 (Heine)**.** Liczba b jest *granicą funkcji* $f(x)$ *przy* $x \to \infty$, jeżeli dla dowolnego nieskończenie dużego ciągu $\{ a_n \}$ ciąg $\{ f(a_n) \}$ jest zbieżnym do b. Oznaczenie:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad \text{lub} \quad f(x) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} b.$$

Definicja 16 (Cauchy)**.** Liczba b jest *granicą funkcji* $f(x)$ *przy* $x \to \infty$, jeżeli dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $A > 0$, taka że $\forall x : |x| > A \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Definicja 17 (Cauchy)**.** Liczba b nazywa się *granicą funkcji* $f(x)$ *przy* $x \to \infty$, jeżeli dla dowolnego otoczenia V punktu b istnieje takie *otoczenie nieskończoności* U, że $f(U) \subset V$.

Twierdzenie 18. *Definicje 15 i 16 są równoważne.*

Jednostronne granice w otoczeniu nieskończoności

Definicja 19 (Heine)**.** Liczba b jest *granicą funkcji* $f(x)$ *przy* $x \to \pm\infty$, jeżeli dla dowolnego nieskończenie dużego ciągu $\{ a_n \}$ o wyrazach dodatnich (ujemnych) ciąg $\{ f(a_n) \}$ jest zbieżnym do b. Oznaczenie:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b \quad \text{lub} \quad f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\to} b.$$

Definicja 20 (Cauchy)**.** Liczba b jest *granicą funkcji* $f(x)$ *przy* $x \to \pm\infty$, jeżeli dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $A > 0$, taka że $\forall x : x > A$(odpowiedno $x < -A$) $\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Definicja 21 (Cauchy)**.** Liczba b nazywa się *granicą funkcji* $f(x)$ *przy* $x \to \pm\infty$, jeżeli dla dowolnego otoczenia V punktu b istnieje takie *otoczenie plus nieskończoności (*odpowienio *minus nieskończoności)* U, że $f(U) \subset V$.

Twierdzenie 22. *Definicje 19 i 20 są równoważne.*

Przykłady

Przykład 23.

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$
- $$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sign}(x) = 1,$$
- $$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sign}(x) = -1.$$

Kryterium Cauchy’ego

Twierdzenie 24. *Funkcja* $f(x)$ *ma w punkcie* a *granicę* $\iff$
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$*, takie że*
$\forall x_1, x_2 : |x_1 - a| < \delta, |x_2 - a| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$*.*

Działania a granice

Twierdzenie 25. *Przy założeniu, że granice* $\lim f(x)$ *i* $\lim g(x)$ *istnieją, mają miejsce wzory:*

- $\lim\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$,
- $\lim\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$,
- $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$, *o ile* $\lim g(x) \neq 0$,
- $f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow \lim f(x) \leqslant \lim g(x)$,
- $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ *i* $\lim f(x) = \lim g(x) \Rightarrow \lim h(x) = \lim f(x) = \lim g(x)$.

Dowód. Wynika z właściwości zbieznych ciągów. $\square$

Wnioski

Wniosek 26.

- *Niech* $P(x)$ *będzie wielomianem. Wtedy* $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$.
- *Niech* $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *będzie* funkcją wymierną, *przy czym* $Q(a) \neq 0$. *Wtedy* $\lim_{x \to a} R(x) = R(a)$.

Funkcje nieskończenie małe

Definicja 27. Funkcja $\alpha(x)$ nazywa się *nieskończenie małą* przy $x \to a$, jeżeli $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$. Oznaczenie: $\alpha(x) = o(1)$ przy $x \to a$.

Przykład 28.
- $(x-a)^n = o(1)$ przy $x \to a$.
- Jeżeli $\lim\limits_{x\to a} = b$, to funkcja $f(x) = b + o(1)$ przy $x \to a$.

Uwaga 29. W definicji 27 może być $x \to a\pm$, $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$.

Funkcje nieskończenie duże

Definicja 30 (Heine)**.** Funkcja $f(x)$ nazywa się *nieskończenie dużą* przy $x \to a$, jeżeli dla dowolnego ciągu $\{ a_n \}$ o wyrazach różnych od a ciąg wartości funkcji $\{ f(a_n) \}$ jest nieskończenie dużym. Oznaczenie: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Definicja 31 (Cauchy)**.** Funkcja $f(x)$ nazywa się *nieskończenie dużą* przy $x \to a$, jeżeli dla dowolnej liczby $N > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że $\forall x : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > A$.

Definicja 32 (Cauchy)**.** Funkcja $f(x)$ nazywa się *nieskończenie dużą* przy $x \to a$, jeżeli dla dowolnego otoczenia nieskończoności V istnieje takie sąsiedztwo U punktu a, że $f(U) \subset V$.

Twierdzenie 33. *Definicje 30 i 31 są równoważne.*

Funkcje nieskończenie duże. Cd

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$
- $\lim\limits_{x \to a\pm} f(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x \to a\pm} f(x) = \pm\infty$
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Przykład 34.

- $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$,
- $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Rząd funkcji

Definicja 35. Niech dane będą $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ — dwie funkcje określone przy $x \to a$. Wówczas

- $\alpha(x) = o(\beta(x))$ przy $x \to a$, jeżeli istnieje taka nieskończenie mała przy $x \to a$ funkcja $\varepsilon(x)$, że $|\alpha(x)| \leqslant \varepsilon(x)|\beta(x)|$ przy $x \to a$.
- $\alpha(x) = O(\beta(x))$ przy $x \to a$, jeżeli istnieje taka stała $C \in \mathbb{R}$, że $|\alpha(x)| \leqslant C|\beta(x)|$ przy $x \to a$.
- $\alpha(x) \sim \beta(x)$ przy $x \to a$, jeżeli przy $x \to a$ jednocześnie $\alpha(x) = O(\beta(x))$ i $\beta(x) = O(\alpha(x))$.

Uwaga 36. W definicji 35 może być $x \to a\pm$, $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$.

Rząd funkcji. Cd

Twierdzenie 37.

- *Jeżeli* $\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, *to* $\alpha(x) = o(\beta(x))$ *przy* $x \to a$.
- *Jeżeli istnieje* $\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$, *to* $\alpha(x) = O(\beta(x))$ *przy* $x \to a$.

Przykład 38.

- $x^3 - x^5 \sim x^3$ przy $x \to 0$,
- $\frac{5}{x-1} \sim \frac{1}{x}$ przy $x \to +\infty$,
- $\sqrt{1-x^2} = O(\sqrt{1-x})$ przy $x \to 1-$.

Asymptoty pionowe

Definicja 39. Prosta $x = a$ jest

1. (obustronną) pionową asymptotą funkcji $f(x)$, jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$
2. lewostronną pionową asymptotą funkcji $f(x)$, jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = \infty$
3. prawostronną pionową asymptotą funkcji $f(x)$, jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = \infty$

Asymptoty poziome

Definicja 40. Prosta $y = b$ jest

1. (obustronną) poziomą asymptotą funkcji $f(x)$, jeżeli $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$
2. lewostronną poziomą asymptotą funkcji $f(x)$, jeżeli $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$
3. prawostronną poziomą asymptotą funkcji $f(x)$, jeżeli $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

Asymptoty ukośne

Definicja 41. Prosta $y = ax + b$ jest

1. (obustronną) ukośną asymptotą funkcji $f(x)$, jeżeli
$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x) - (ax+b)\big) = 0 \iff f(x) = ax + b + o(1)$$
2. lewostronną ukośną asymptotą funkcji $f(x)$, jeżeli
$$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x) - (ax+b)\big) = 0 \iff f(x) = ax + b + o(1)$$
3. prawostronną ukośną asymptotą funkcji $f(x)$, jeżeli
$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - (ax+b)\big) = 0 \iff f(x) = ax + b + o(1)$$