Matematyka

Funkcje ciągłe

Aleksander Denisiuk

`denisjuk@euh-e.edu.pl`

Elbląska Uczelnia Humanistyczno-Ekonomiczna

ul. Lotnicza 2

82-300 Elbląg

Funkcje ciągłe

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

`http://denisjuk.euh-e.edu.pl/`

Definicja funkcji ciągłej

Niech dana będzie funkcja $f(x)$, określona w otoczeniu punktu a.

Definicja 1. Funkcja $f(x)$ nazywa się *ciągłą w punkcie a*, jeżeli $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Jeżeli $f(x)$ jest ciągłą w każdym punkcie zbioru X, to mówimy wówczas, że f jest ciągła na zbiorze X.

Własności lokalne funkcji ciągłych

Twierdzenie 2. *Niech dane będą funkcje $f(x)$ i $g(x)$, ciągłe w punkcie a. Wtedy funkcje $f \pm g$, $f \cdot g$ oraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ (ostatnia przy założeniu $g(a) \neq 0$) są ciągłe w punkcie a.*

Wniosek 3.

1. *Stała funkcja jest ciągłą.*
2. $f(x) = x$ *jest funkcją ciągła.*
3. *Wielomian jest funkcją ciągłą.*
4. *Niech* $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *będzie* funkcją wymierną, *przy czym* $Q(x) \neq 0$ *na przedziale* $[a, b]$. *Wtedy* $R(x)$ *jest funkcją ciągłą na przedziale* $[a, b]$.

Własności lokalne funkcji ciągłych, cd

Definicja 4. Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ nazywa się *ograniczoną z góry (z dołu)*, jeżeli $\exists M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$), takie $\forall x \in X$ spełnia się nierówność $f(x) \leqslant M$ ($f(x) \geqslant m$). Funkcja, ograniczona z dołu i z góry nazywa się *ograniczoną.*

Twierdzenie 5. *Funkcja, ciągła w punkcie a, jest ograniczona w otoczeniu a.*

Twierdzenie 6. *Niech funkcja f będzie ciągłą w punkcie a, oraz $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$). Wtedy, w otoczeniu punktu a, $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).*

Funkcje złożone

Definicja 7. Niech dane będą dwie funkcje $f : X \to Y$ oraz $g : Y \to Z$. Wówczas funkcja $h = g \circ f : X \to Z$, $h : x \mapsto g(f(x))$ nazywa się *funkcją złożona (superpozycją funkcji f i g).*

Twierdzenie 8. *Niech funkcja $f(x)$ będzie ciągłą w punkcie x_0, funkcja $g(y)$ będzie ciągłą w punkcie $y_0 = f(x_0)$. Wtedy $g \circ f$ będzie ciągłą w punkcie x_0.*

Właściwości globalne funkcji ciągłych

Twierdzenie 9. *Niech funkcja f będzie ciągłą na przedziale $[a, b]$ i ma w końcach tego przedziału wartości różnych znaków ($f(a)f(b) < 0$). Wtedy istnieje taki punkt $x_0 \in (a, b)$, że $f(x_0) = 0$.*

Dowód. Rozważmy przypadek $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Za x_0 można przyjąć $\sup\{\, x \in [a, b] \mid f(x) > 0 \,\}$. □

Wniosek 10. *Niech funkcja f będzie ciągłą na przedziale $[a, b]$. Wtedy $\forall \gamma$ między $f(a)$ a $f(b)$ istnieje $x_0 \in (a, b)$, takie, że $f(x_0) = \gamma$.*

Wniosek 11. *Równanie $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2k} x^{2k} + x^{2k+1} = 0$, gdzie $k \geqslant 0$, ma przynajmniej jeden pierwiastek.*

Kresy funkcji. Twierdzenia Weierstrassa

Definicja 12 (cf. definicję 4)**.** Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest *ograniczona z góry (z dołu, ograniczona),* jeżeli takim jest zbiór $\{ f(X) \}$. Liczby $\inf \{ f(X) \}$ oraz $\sup \{ f(X) \}$ nazywają się odpowiednio *dolnym* i *górnym kresem* funkcji f: $\inf\limits_{x \in X} f(x) = \inf \{ f(X) \}$, $\sup\limits_{x \in X} f(x) = \sup \{ f(X) \}$.

Twierdzenie 13 (Pierwsze twierdzenie Weierstrassa)**.** *Niech funkcja f będzie ciągłą na przedziale $[a, b]$. Wtedy f jest ograniczona na tym przedziale.*

Twierdzenie 14 (Drugie twierdzenie Weierstrassa)**.** *Niech funkcja f będzie ciągłą na przedziale $[a, b]$. Wtedy f osiąga na tym przedziale swoje kresy.*

Dowód. Załóżmy, że $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ nie jest osiągalnym. Wtedy $\frac{1}{f(x) - M}$ jest ograniczoną. $\square$

Funkcje monotoniczne

Definicja 15. Niech dana będzie funkcja $f : X \to Y$.

1. Funkcja $y = f(x)$ nazywa się *rosnącą,* jeżeli $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
2. Funkcja $y = f(x)$ nazywa się *malejącą,* jeżeli $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
3. Funkcja $y = f(x)$ nazywa się *niemalejącą,* jeżeli $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
4. Funkcja $y = f(x)$ nazywa się *nierosnącą,* jeżeli $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
5. Funkcja $y = f(x)$ nazywa się *monotoniczną,* jeżeli ona jest nierosnącą lub niemalejącą.
6. Funkcja $y = f(x)$ nazywa się *ściśle monotoniczną,* jeżeli ona jest rosnącą lub malejącą.

Przykłady funkcji monotonicznych

Przykład 16. 1. $f(x) = x$ rośnie na całej osi $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = x^2$ jest rosnącą na półprostej $[0, +\infty)$ i malejącą na $(-\infty, 0]$.

3. $f(x) = \operatorname{sign} x$ jest niemalejącą.

4. $f(x) = \frac{1}{x}$ jest rosnącą na zbiorach $(-\infty, 0)$ oraz $(0, +\infty)$.

Odwrotna funkcja

Definicja 17. Niech dana będzie funkcja $f : X \to Y$.

1. Jeśli $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, to funkcja f nazywa się *różnowartościową (injektywną).*
2. Jeśli $\forall y \in Y \quad \exists x \in X$, taki że $f(x) = y$, to funkcja f nazywa się *odwzorowaniem „na” (funkcją surjektywną).*
3. Różnowartościowe odwzorowanie „na” nazywa się *wzajemnie-jednoznacznym odwzorowaniem (funkcją bijektywną).*

Definicja 18. Niech dana będzie funkcja $f : X \to Y$. Funkcja $f^{-1} : Y \to X$ (o ile taka funkcja istnieje) nazywa się *odwrotną do f*, jeżeli

1. $\forall x \in X \quad f^{-1}(f(x)) = x$ czyli $f^{-1} \circ f = \mathbf{1}_X$[a].
2. $\forall y \in Y \quad f(f^{-1}(y)) = y$ czyli $f \circ f^{-1} = \mathbf{1}_Y$.

---

[a] $\mathbf{1}_Z : Z \to Z$ — *odwzorowanie jednostkowe,* $\forall z \in Z : \not\Vdash_Z(z) = z$

Funckja odwrotna, cd

Twierdzenie 19. *Niech dana będzie funkcja* $f : X \to Y$*.* *Wówczas istnieje funkcja odwrotna* $f^{-1} : Y \to X \iff f$ *jest wzajemnie-jednoznacznym odwzorowaniem.*

Przykład 20.

1. Niech $f : [a, b] \to [2a, 2b],\ f(x) = 2x$. Wtedy $f^{-1} : [2a, 2b] \to [a, b],\ f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$.
2. Niech $f : [0, 2] \to [0, 4],\ f(x) = x^2$. Wtedy $f^{-1} : [0, 4] \to [0, 2],\ f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Właściwości funkcji monotonicznych

Twierdzenie 21. *Niech dana będzie monotoniczna na przedziale* $[a, b]$ *funkcja* f*. Wtedy* $\forall c,\ a \leqslant c < b$ *(*$\forall c,\ a < c \leqslant b$*) istnieje* $\lim\limits_{x \to c+} f(x)$ *(*$\lim\limits_{x \to c-} f(x)$*).*

Dowód. Niech funkcja $f(x)$ będzie niemalejącą. Wtedy
$\lim\limits_{x \to c+} f(x) = \inf \{\, f(x) \mid x > c \,\}$. $\square$

Twierdzenie 22. *Niech dana będzie rosnąca (malejąca) na przedziale* $[a, b]$ *funkcja* f*,* $f(a) = \alpha$*,* $f(b) = \beta$*. Wtedy, jeśli zbiorem wartości* f *jest przedział* $[\alpha, \beta]$ *(*$[\beta, \alpha]$*), to na tym przedziale jest określona funkcja odwrotna* f^{-1}*, która również jest rosnącą (malejącą).*

Dowód.

1. f jest odwzorowaniem „na”,
2. f jest funkcją różnowartościową,
3. $x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$.

$\square$

Funkcja odwrotna do monotnonicznej

Twierdzenie 23. *Niech dana będzie rosnąca (malejąca) na przedziale* $[a, b]$ *funkcja* f*,* $f(a) = \alpha$*,* $f(b) = \beta$*. Na to, aby* f *była ciągłą, potrzeba i wystarczy, żeby* $\forall\gamma$ *między* α *i* β *istniał punkt* $x \in [a, b]$*, taki że* $f(x) = \gamma$*.*

Twierdzenie 24. *Niech dana będzie rosnąca (malejąca) na przedziale* $[a, b]$ *i ciągła funkcja* f*,* $f(a) = \alpha$*,* $f(b) = \beta$*. Wtedy, na przedziale* $[\alpha, \beta]$ *(*$[\beta, \alpha]$*) określona jest funkcja odwrotna* f^{-1}*, która również jest rosnącą (malejącą) i ciągła.*