

Matematyka
Funkcje ciągłe

Aleksander Denisiuk

denisjuk@euh-e.edu.pl

Elbląska Uczelnia Humanistyczno-Ekonomiczna

ul. Lotnicza 2

82-300 Elbląg

Funkcje ciągłe

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

<http://denisjuk.euh-e.edu.pl/>

Definicja funkcji ciągłej

Niech dana będzie funkcja $f(x)$, określona w otoczeniu punktu a .

Definicja 1. Funkcja $f(x)$ nazywa się *ciągłą w punkcie a* , jeżeli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Jeżeli $f(x)$ jest ciągłą w każdym punkcie zbioru X , to mówimy wówczas, że f jest ciągła na zbiorze X .

Własności lokalne funkcji ciągłych

Twierdzenie 2. *Niech dane będą funkcje $f(x)$ i $g(x)$, ciągłe w punkcie a .*

Wtedy funkcje $f \pm g$, $f \cdot g$ oraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ (ostatnia przy założeniu $g(a) \neq 0$) są ciągłe w punkcie a .

Wniosek 3. 1. *Stała funkcja jest ciągła.*

2. *$f(x) = x$ jest funkcją ciągłą.*

3. *Wielomian jest funkcją ciągłą.*

4. *Niech $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ będzie funkcją wymierną, przy czym $Q(x) \neq 0$ na przedziale $[a, b]$. Wtedy $R(x)$ jest funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$.*

Własności lokalne funkcji ciągłych, cd

Definicja 4. Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywa się *ograniczoną z góry (z dołu)*, jeżeli $\exists M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$), takie $\forall x \in X$ spełnia się nierówność $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$). Funkcja, ograniczona z dołu i z góry nazywa się *ograniczoną*.

Twierdzenie 5. *Funkcja, ciągła w punkcie a , jest ograniczona w otoczeniu a .*

Twierdzenie 6. *Niech funkcja f będzie ciągłą w punkcie a , oraz $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$). Wtedy, w otoczeniu punktu a , $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).*

Funkcje złożone

Definicja 7. Niech dane będą dwie funkcje $f : X \rightarrow Y$ oraz $g : Y \rightarrow Z$. Wówczas funkcja $h = g \circ f : X \rightarrow Z$, $h : x \mapsto g(f(x))$ nazywa się *funkcją złożoną (superpozycją funkcji f i g)*.

Twierdzenie 8. Niech funkcja $f(x)$ będzie ciągłą w punkcie x_0 , funkcja $g(y)$ będzie ciągłą w punkcie $y_0 = f(x_0)$. Wtedy $g \circ f$ będzie ciągłą w punkcie x_0 .

Właściwości globalne funkcji ciągłych

Twierdzenie 9. Niech funkcja f będzie ciągłą na przedziale $[a, b]$ i ma w końcach tego przedziału wartości różnych znaków ($f(a)f(b) < 0$). Wtedy istnieje taki punkt $x_0 \in (a, b)$, że $f(x_0) = 0$.

Dowód. Rozważmy przypadek $f(a) > 0, f(b) < 0$. Za x_0 można przyjąć $\sup \{ x \in [a, b] \mid f(x) > 0 \}$. □

Wniosek 10. Niech funkcja f będzie ciągłą na przedziale $[a, b]$. Wtedy $\forall \gamma$ między $f(a)$ a $f(b)$ istnieje $x_0 \in (a, b)$, takie, że $f(x_0) = \gamma$.

Wniosek 11. Równanie $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2k}x^{2k} + x^{2k+1} = 0$, gdzie $k \geq 0$, ma przynajmniej jeden pierwiastek.

Kresy funkcji. Twierdzenia Weierstrassa

Definicja 12 (cf. definicję 4). Funkcja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest *ograniczona z góry* (z dołu, *ograniczona*), jeżeli takim jest zbiór $\{ f(X) \}$. Liczby $\inf \{ f(X) \}$ oraz $\sup \{ f(X) \}$ nazywają się odpowiednio *dolnym* i *górnym kresem* funkcji f : $\inf_{x \in X} f(x) = \inf \{ f(X) \}$, $\sup_{x \in X} f(x) = \sup \{ f(X) \}$.

Twierdzenie 13 (Pierwsze twierdzenie Weierstrassa). *Niech funkcja f będzie ciągłą na przedziale $[a, b]$. Wtedy f jest ograniczona na tym przedziale.*

Twierdzenie 14 (Drugie twierdzenie Weierstrassa). *Niech funkcja f będzie ciągłą na przedziale $[a, b]$. Wtedy f osiąga na tym przedziale swoje kresy.*

Dowód. Załóżmy, że $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ nie jest osiągalnym. Wtedy $\frac{1}{f(x) - M}$ jest ograniczoną. □

Funkcje monotoniczne

Definicja 15. Niech dana będzie funkcja $f : X \rightarrow Y$.

1. Funkcja $y = f(x)$ nazywa się *rosnącą*, jeżeli
 $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
2. Funkcja $y = f(x)$ nazywa się *malejącą*, jeżeli
 $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
3. Funkcja $y = f(x)$ nazywa się *niemalejącą*, jeżeli
 $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
4. Funkcja $y = f(x)$ nazywa się *nierosnącą*, jeżeli
 $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
5. Funkcja $y = f(x)$ nazywa się *monotoniczną*, jeżeli ona jest nierosnącą lub niemalejącą.
6. Funkcja $y = f(x)$ nazywa się *ściśle monotoniczną*, jeżeli ona jest rosnącą lub malejącą.

Przykłady funkcji monotonicznych

Przykład 16. 1. $f(x) = x$ rośnie na całej osi \mathbb{R} .

2. $f(x) = x^2$ jest rosnącą na półprostej $[0, +\infty)$ i malejącą na $(-\infty, 0]$.

3. $f(x) = \text{sign } x$ jest niemalejącą.

4. $f(x) = \frac{1}{x}$ jest rosnącą na zbiorach $(-\infty, 0)$ oraz $(0, +\infty)$.

Odwrotna funkcja

Definicja 17. Niech dana będzie funkcja $f : X \rightarrow Y$.

1. Jeśli $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, to funkcja f nazywa się *różnowartościową (injektywną)*.
2. Jeśli $\forall y \in Y \exists x \in X$, taki że $f(x) = y$, to funkcja f nazywa się *odwzorowaniem „na” (funkcją surjektywną)*.
3. Różnowartościowe odwzorowanie „na” nazywa się *wzajemnie-jednoznaczny odwzorowaniem (funkcją bijektywną)*.

Definicja 18. Niech dana będzie funkcja $f : X \rightarrow Y$. Funkcja $f^{-1} : Y \rightarrow X$ (o ile taka funkcja istnieje) nazywa się *odwrotną do f* , jeżeli

1. $\forall x \in X \quad f^{-1}(f(x)) = x$ czyli $f^{-1} \circ f = \mathbf{1}_X^a$.
2. $\forall y \in Y \quad f(f^{-1}(y)) = y$ czyli $f \circ f^{-1} = \mathbf{1}_Y$.

^a $\mathbf{1}_Z : Z \rightarrow Z$ — odwzorowanie jednostkowe, $\forall z \in Z : \mathbb{K}_Z(z) = z$

Funckja odwrotna, cd

Twierdzenie 19. Niech dana będzie funkcja $f : X \rightarrow Y$.

Wówczas istnieje funkcja odwrotna $f^{-1} : Y \rightarrow X \iff f$ jest wzajemnie-jednoznaczny odwzorowaniem.

Przykład 20. 1. Niech $f : [a, b] \rightarrow [2a, 2b]$, $f(x) = 2x$. Wtedy

$$f^{-1} : [2a, 2b] \rightarrow [a, b], f^{-1}(y) = \frac{y}{2}.$$

2. Niech $f : [0, 2] \rightarrow [0, 4]$, $f(x) = x^2$. Wtedy

$$f^{-1} : [0, 4] \rightarrow [0, 2], f^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

Właściwości funkcji monotonicznych

Twierdzenie 21. Niech dana będzie monotoniczna na przedziale $[a, b]$ funkcja f . Wtedy $\forall c, a \leq c < b$ ($\forall c, a < c \leq b$) istnieje $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$ ($\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$).

Dowód. Niech funkcja $f(x)$ będzie niemalejącą. Wtedy $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = \inf \{ f(x) \mid x > c \}$. □

Twierdzenie 22. Niech dana będzie rosnąca (malejąca) na przedziale $[a, b]$ funkcja f , $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. Wtedy, jeśli zbiorem wartości f jest przedział $[\alpha, \beta]$ ($[\beta, \alpha]$), to na tym przedziale jest określona funkcja odwrotna f^{-1} , która również jest rosnącą (malejącą).

Dowód.

1. f jest odwzorowaniem „na”,
2. f jest funkcją różnowartościową,
3. $x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$.

□

Funkcja odwrotna do monotonicznej

Twierdzenie 23. Niech dana będzie rosnąca (malejąca) na przedziale $[a, b]$ funkcja f , $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. Na to, aby f była ciągłą, potrzeba i wystarczy, żeby $\forall \gamma$ między α i β istniał punkt $x \in [a, b]$, taki że $f(x) = \gamma$.

Twierdzenie 24. Niech dana będzie rosnąca (malejąca) na przedziale $[a, b]$ i ciągła funkcja f , $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. Wtedy, na przedziale $[\alpha, \beta]$ ($[\beta, \alpha]$) określona jest funkcja odwrotna f^{-1} , która również jest rosnącą (malejącą) i ciągłą.