

*Matematyka*  
*Pochodna funkcji*

Aleksander Denisiuk

denisjuk@euh-e.edu.pl

Elbląska Uczelnia Humanistyczno-Ekonomiczna

ul. Lotnicza 2

82-300 Elbląg

## Pochodna funkcji

---

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

<http://denisjuk.euh-e.edu.pl/>

## Pojęcie pochodnej

Niech dana będzie funkcja  $y = f(x)$ , określona w otoczeniu  $(a, b)$  punktu  $x$ .

**Definicja 1.** 1. Liczba  $\Delta x$ , taka że  $x + \Delta x \in (a, b)$  nazywa się *przyrostem* zmiennej niezależnej  $x$ .

2. Liczba  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  nazywa się *przyrostem* funkcji  $f$  w punkcie  $x$ .

**Lemat 2.** Funkcja  $y = f(x)$  jest ciągła w punkcie  $x$  wtedy i tylko wtedy, gdy przyrost funkcji w tym punkcie,  $\Delta y = o(1)$  przy  $\Delta x \rightarrow 0$ .

**Definicja 3.** 1. Iloraz  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  nazywa się *ilorazem różniczkowym*

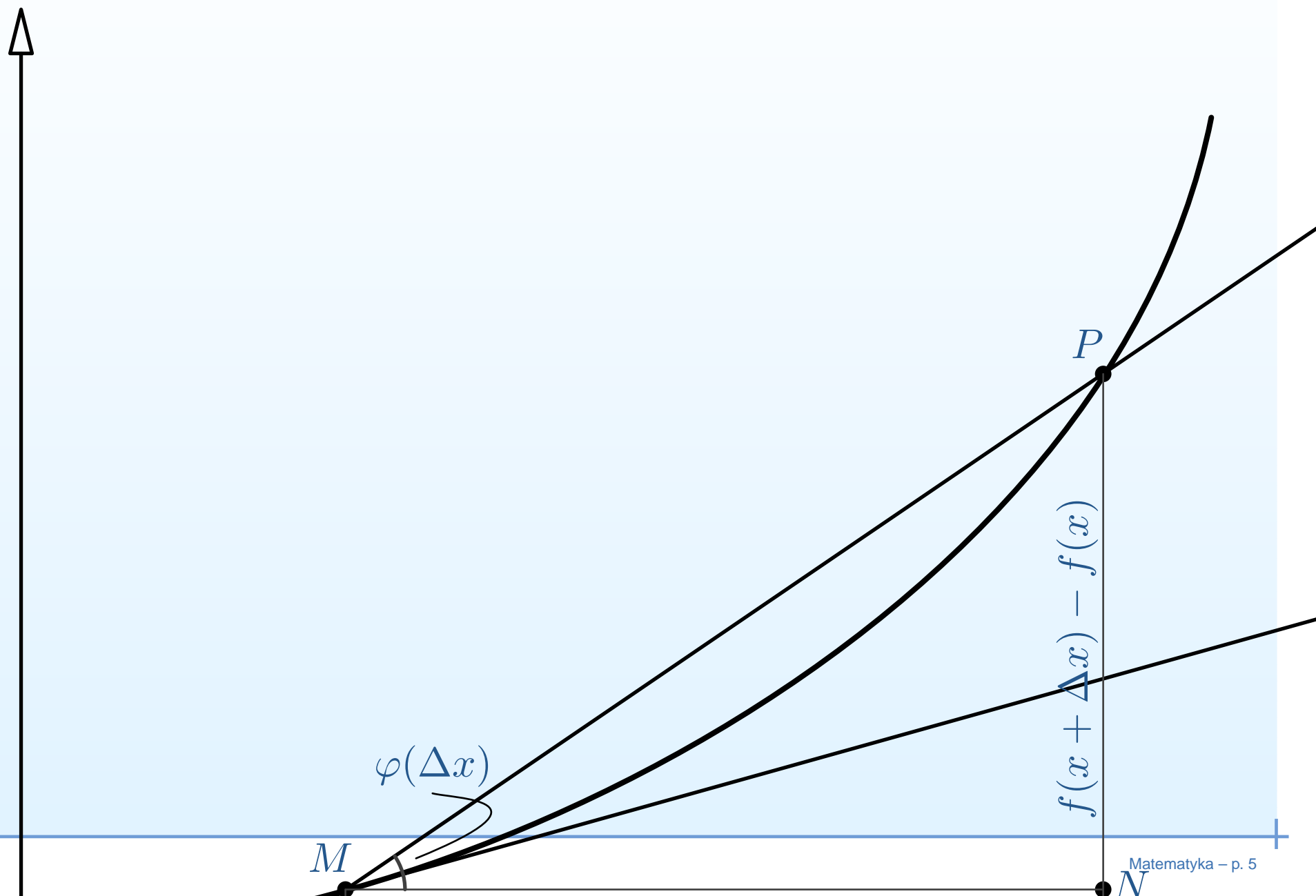
2. Granica (o ile istnieje)  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  nazywa się *pochodną* funkcji  $f$  w punkcie  $x$ .

3. Alternatywne oznaczenia:  $f'(x) = \frac{df}{dx}$ ,  $y'(t) = \dot{y}(t)$ .

## Przykłady

- Przykład 4.**
1.  $f(x) = \text{const} \implies f'(x) = 0.$
  2.  $f(x) = x \implies f'(x) = 1.$
  3. Funkcja  $f(x) = |x|$  nie ma pochodnej w punkcie 0.

# Sens geometryczny pochodnej funkcji w punkcie



## Komentarze do rysunku

**Definicja 5.** Prosta, przechodząca przez punkty  $M$  i  $P$  nazywa się *styczną*

- *Kąt pochylenia* stycznej  $MP$  jest funkcją od  $\Delta x$ , oznaczmy jego przez  $\varphi(\Delta x)$ .
- Z trójkąta  $MPN$  widać, że  $\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .
- W taki sposób, przy  $\Delta x \rightarrow 0$  ( $P \rightarrow M$ ) istnieje położenie graniczne stycznej wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $f'(x)$ .

**Definicja 6.** Prosta  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  jest *styczną* do wykresu funkcji  $y = f(x)$  w punkcie  $x_0$ .

*Uwaga 7.*  $f'(x)$  zgadza się z tangensem kąta pochylenia stycznej.

*Uwaga 8.* Funkcja  $y = f(x)$ , która ma pochodną nazywa się również *gładką*.

# Funkcje różniczkowalne

**Definicja 9.** Funkcja  $y = f(x)$  nazywa się *różniczkowalną* w punkcie  $x$ , jeżeli  $\exists A \in \mathbb{R}$ , takie że  $\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$  przy  $\Delta x \rightarrow 0$ .

**Twierdzenie 10.** Funkcja  $y = f(x)$  jest różniczkowalna w punkcie  $x_0$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $f'(x_0)$ .

Dowód.  $\Rightarrow: \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + o(1)) = A.$

$\Leftarrow: \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - f'(x_0) \cdot \Delta x}{\Delta x} = 0 \implies \Delta y = f'(x_0) \Delta x + o(\Delta x).$

□

**Wniosek 11.** Liczba  $A$  w definicji 9 równa jest  $f'(x_0)$ .

**Twierdzenie 12.** Funkcja różniczkowalna w punkcie jest ciągłą w tym punkcie.

## Różniczkowanie funkcji złożonej

**Twierdzenie 13.** Niech funkcja  $x = \varphi(t)$  będzie różniczkowalną w punkcie  $t_0$ , zaś funkcja  $y = f(x)$  będzie różniczkowalną w punkcie  $x_0 = \varphi(t_0)$ . Wtedy funkcja złożona  $f(\varphi(t))$  będzie różniczkowalną w punkcie  $t_0$ , przy czym

$$[f(\varphi(t_0))] = f'(\varphi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0)$$

*Dowód.* •  $\Delta x = \varphi'(t_0)\Delta t + o(\Delta t)$ .

- $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) = f'(\varphi(t_0))[\varphi'(t_0)\Delta t + o(\Delta t)] + o(\Delta t) = f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0)\Delta t + o(\Delta t)$ .

□

## Różniczkowanie funkcji odwrotnej

**Twierdzenie 14.** Niech  $f(x)$  będzie funkcją rosnącą (malejącą) i ciągłą w otoczeniu punktu  $x_0$ , oraz różniczkowalną w punkcie  $x_0$  i  $f'(x) \neq 0$ . Wtedy w otoczeniu punktu  $y_0 = f(x_0)$  określona jest funkcja odwrotna  $x = f^{-1}(y)$ , która jest rosnącą (malejącą) i ciągłą w otoczeniu  $y_0$  oraz różniczkowalna w punkcie  $y_0$  i

$$[f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

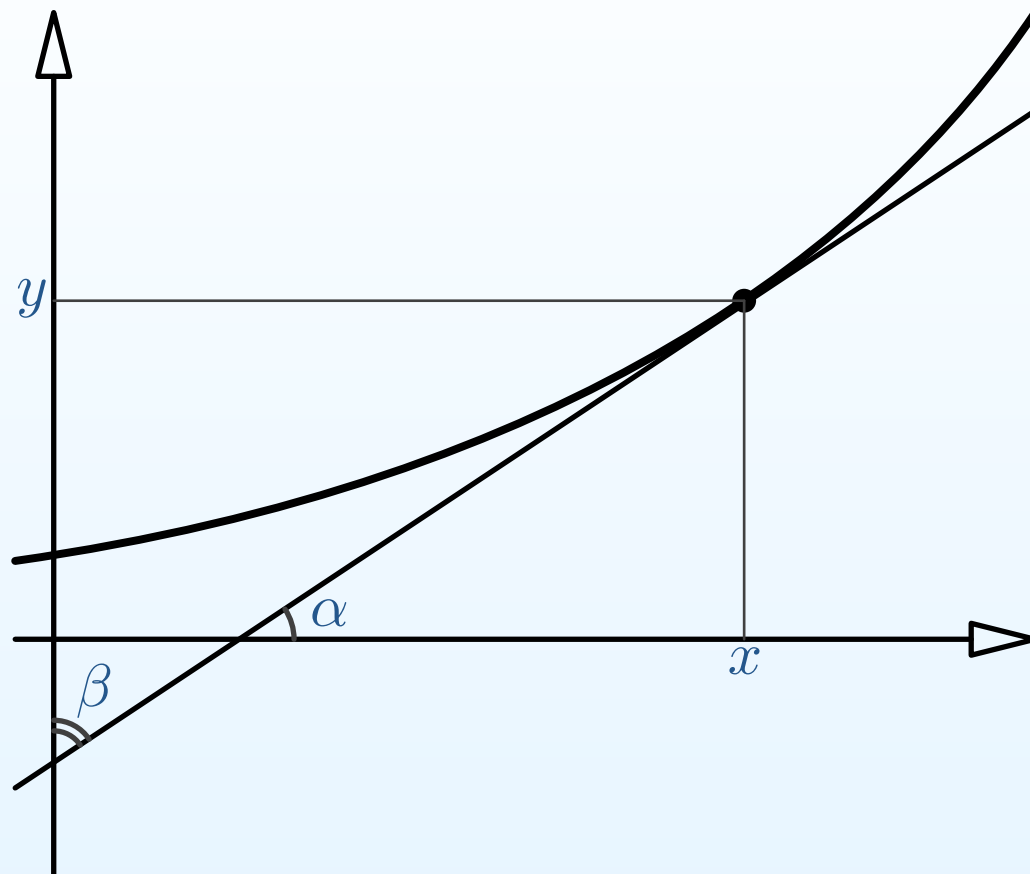
*Dowód.* •  $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$

• Za mocą ciągłości  $\Delta y \rightarrow 0 \iff \Delta x \rightarrow 0.$

• Więc  $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$

□

## Sens geometryczny pochodnej funkcji odwrotnej



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}, \text{ gdy } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

## Różniczkowanie sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji

---

**Twierdzenie 15.** Niech funkcje  $u(x)$  oraz  $v(x)$  będą różniczkowalne w punkcie  $x$ . Wtedy suma, różnica, iloczyn i iloraz (iloraz w przypadku  $v(x) \neq 0$ ) są różniczkowalne w punkcie  $x$ , przy czym

1.  $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x),$

2.  $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$

3.  $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}.$

# Pochodne funkcji elementarnych

**Twierdzenie 16.** 1.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e,$$

$$2. (\ln_a x)' = \frac{1}{x},$$

$$3. (a^x)' = a^x \cdot \ln a,$$

$$4. (e^x)' = e^x,$$

$$5. (x^a)' = a \cdot x^{a-1},$$

$$6. (\sin x)' = \cos x,$$

$$7. (\cos x)' = -\sin x,$$

$$8. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$9. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$10. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$11. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$12. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$13. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$14. (\sinh x)' = \cosh x,$$

$$15. (\cosh x)' = \sinh x,$$

$$16. (\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x},$$

$$17. (\operatorname{ctgh} x)' = \frac{1}{\sinh^2 x}.$$

## Dwóć twierdzenia 16

$$\text{Dowód. } 1 \frac{\Delta \log_a x}{\Delta x} = \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a(x)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \\ \frac{1}{x} \log_a\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a e.$$

$$3 (a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y} \log_a e} = \frac{y}{\log_a e} = a^x \cdot \ln a.$$

$$5 (x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} \cdot (a \ln x)' = x^a \cdot a \frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

$$6 \frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \\ \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \cos x.$$

$$7 (\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\sin x.$$

$$8 (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

–verte–

## Dwóć twierdzenia 16, cd

---

$$\text{Dowód. cd.} \quad 10 \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos \arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$12 \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$14 \quad (\sinh x)' = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

□