Matematyka

Właściwości funkcji Różniczkowalnych

Aleksander Denisiuk

denisjuk@euh-e.edu.pl

Elbląska Uczelnia Humanistyczno-Ekonomiczna

ul. Lotnicza 2

82-300 Elbląg

Właściwości funkcji Różniczkowalnych

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

`http://denisjuk.euh-e.edu.pl/`

Wzrastanie funkcji w punkcie. Ekstremum lokalne

Niech dana będzie funkcja $y = f(x)$, określona w otoczeniu punktu c.

Definicja 1.

1. Funkcja $y = f(x)$ *rośnie* w punkcie c, jeżeli istnieje takie otoczenie punktu c, że $f(x) < f(c)$ dla $x < c$ oraz $f(x) > f(c)$ dla $x > c$,
2. Funkcja $y = f(x)$ *maleje* w punkcie c, jeżeli istnieje takie otoczenie punktu c, że $f(x) > f(c)$ dla $x < c$ oraz $f(x) < f(c)$ dla $x > c$,
3. Funkcja $y = f(x)$ ma *maksimum lokalne* w punkcie c, jeżeli istnieje takie otoczenie punktu c, w którym $f(x) \leqslant f(c)$
4. Funkcja $y = f(x)$ ma *minimum lokalne* w punkcie c, jeżeli istnieje takie otoczenie punktu c, w którym $f(x) \geqslant f(c)$
5. Funkcja $y = f(x)$ ma *ekstremum lokalne* w punkcie c, jeżeli ona ma w tym punkcie minimum lub maksimum lokalne.

Konieczny warunek ekstremum

Twierdzenie 2. *Niech dana będzie funkcja $f(x)$ różniczkowalna w punkcie a. Wtedy, jeżeli $f'(a) > 0$ ($f'(a) < 0$), to $f(x)$ rośnie (maleje) w punkcie a.*

Wniosek 3. *Jeżeli funkcja $f(x)$ ma wpunkcie a ekstremum lokalne, to $f'(a) = 0$.*

Uwaga 4. Przykład funkcji $y = x^3$ wskazuje, że twierdzenie 2 daje *dostateczny* warunek wzrastania (malenia), który nie jest koniecznym. Natomiast warunek ekstremum lokalnego z wniosku 3 jest *koniecznym*, i nie jest dostatecznym.

Twierdzenie Rolle'a

Twierdzenie 5. *Niech funkcja* $y = f(x)$ *będzie ciągłą na przedziale* $[a, b]$*, różniczkowalną na przedziale* (a, b)*, oraz* $f(a) = f(b)$*. Wtedy* $\exists \xi \in (a, b)$*, takie że* $f'(\xi) = 0$*.*

Dowód. f osiąga swoje kresy $M = \sup f$ i $m = \inf f$. Jeżeli $M = m$, to $f(x) = \mathrm{const}$ i $f'(x) \equiv 0$. Jeżeli $M > m$, to przynajmniej jeden z kresów jest osiągalny wewnątrz przedziału (a, b). Więc w tym punkcie f ma ekstremum lokalne. $\square$

Twierdzenie Lagrange'a

Twierdzenie 6. *Niech funkcja $y = f(x)$ będzie ciągłą na przedziale $[a, b]$ oraz różniczkowalną na przedziale (a, b). Wtedy $\exists \xi \in (a, b)$, takie że $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.*

Dowód. Zastosować twierdzenie Rolle'a (twierdzenie 5) do funkcji $f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. $\square$

Wnioski z twierdzenia Lagrange'a

Twierdzenie 7. *Niech funkcja $y = f(x)$ będzie różniczkowalna na przedziale (a, b) oraz $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) = 0$. Wtedy $f(x) = \mathrm{const}$.*

Dowód. $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ istnieje $\xi \in (a, b)$ takie, że
$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0$. $\square$

Twierdzenie 8. *Niech funkcja $y = f(x)$ będzie różniczkowalna na przedziale (a, b). Na to, żeby funkcja f była niemalejącą (nierosnącą) na tym przedziale, potrzeba i wystarczy, żeby na (a, b) było $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$).*

Dowód. $\Rightarrow$ Niech $f(x)$ będzie niemalejącą na (a, b). Wtedy w żadnym z punktów (a, b) funkcją nie może być malejącą. Za mocą twierdzenia 2 w żadnym z punktów (a, b) nie może być $f'(x) < 0$.

$\Leftarrow$ Niech $\forall x \in (a, b)$ będzie $f'(x) \geqslant 0$. Rozważmy dowolne $x_1, x_2 \in (a, b)$, takie że $x_1 < x_2$. Istnieje $\xi \in (a, b)$, takie że $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geqslant 0$.

$\square$

Dostateczny warunek monotoniczności funkcji

Twierdzenie 9. *Niech funkcja* $y = f(x)$ *będzie różniczkowalna na przedziale* (a, b) *oraz* $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) > 0$ *(*$f'(x) < 0$*). Wtedy* $f(x)$ *rośnie (maleje) na przedziale* (a, b)*.*

Uwaga 10*.* Warunek $f'(x) > 0$ nie jest *koniecznym* na to, żeby funkcja f była rosnącą na przedziale, np. $y = x^3$.

Wniosek 11 (Dostateczny warunek ekstremum)**.** *Niech funkcja* $y = f(x)$ *będzie różniczkowalna w otoczeniu punktu* a *oraz pochodna* f' *w pukcie* a *zmienia znak z minusa na plus (z plusa na minus). Wtedy* $f(x)$ *ma w punkcie* a *minimum (maksimum) lokalne.*

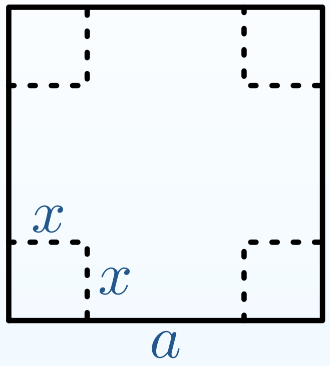
Poszukiwanie maksimum i minimum funkcji

Twierdzenie 12. *Niech funkcja* $y = f(x)$ *będzie ciągła na przedziale* $[a, b]$ *i różniczkowalna w przedziale* (a, b) *za wyjątkiem skończonej ilości punktów. Wtedy funkcja* f *osiąga maksimum (minimum) w pukncie* x_0*, który spełnia jaden z warunków:*

- x_0 *jest końcem przedziału,*
- $f'(x_0) = 0$*,*
- $f'(x_0)$ *nie istnieje.*

Przykład 13. Z kwadratowego kartonu stwórz pudełko o największej objętości.

Rozwiązanie zadania o pudełku



- $f(x) = x(a-2x)^2, \quad x \in [0, \frac{a}{2}],$
- $f'(x) = 0 \iff (a-2x)(a-6x) = 0 \iff x = \frac{a}{2} \vee x = \frac{a}{6},$
-

x	0	$\frac{a}{6}$	$\frac{a}{2}$
$f(x)$	0	$\frac{2a^3}{27}$	0

- Odp: należy nadciąć karton na odległości $\frac{1}{6}$ od rogu.

Dwie nierówności

Twierdzenie 14. *1.* $|\sin x_1 - \sin x_2| \leqslant |x_1 - x_2|$.

2. $|\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2| \leqslant |x_1 - x_2|$.

Dowód. 1. $\sin x_1 - \sin x_2 = \cos \xi (x_1 - x_2)$,

2. $\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2 = \frac{1}{1+\xi^2}(x_1 - x_2)$.

$\square$

Twierdzenie Cauchy'ego

Twierdzenie 15. *Niech funkcje* $f(x)$ *i* $g(x)$ *będą różniczkowalne na przedziale* (a,b)*, ciągłe na przedziale* $[a,b]$ *oraz* $g'(x) \neq 0$ *na* (a,b)*. Wtedy istnieje* $\xi \in (a,b)$*, takie że*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Dowód. Zastosować twierdzenie Rolle'a (twierdzenie 5) do funkcji $f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)$. $\square$

Reguła de L'Hospitala (wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$)

Twierdzenie 16. *Niech dane będą dwie funkcje $f(x)$ i $g(x)$, określone i różniczkowalne w sąsiedztwie punktu a, oraz $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ i $g'(x) \neq 0$ w tym samym sąsiedztwie. Wtedy, jeżeli istnieje (być może, nieskończona) granica $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to istnieje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Dowód. Określmy funkcje $f(x)$ oraz $g(x)$ zerem w punkcie a. Wtedy funkcje te zostaną ciągłe w ototczeniu a i można zastosować twierdzenie Cauchy'ego (twierdzenie 15).

Niech $\{ x_n \}$ będzie ciągiem, zbieżnym do a o wyrazach różnych od a. Wtedy $\forall n \ \exists \xi_n$ między a i x_n, takie że $\frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$. Ciąg $\{ \xi_n \}$ też będzie zbieżnym do a i o wyrazach różnych od a. W ten sposób

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

$\square$

Reguła de L'Hospitala (wyrażenie nieoznaczone $\frac{\infty}{\infty}$)

Twierdzenie 17. *Niech dane będą dwie funkcje* $f(x)$ *i* $g(x)$*, określone i różniczkowalne w sąsiedztwie punktu* a*, oraz oraz* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ *w tym samym sąsiedztwie. Wtedy, jeżeli istnieje (być może, nieskończona) granica* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$*, to istnieje*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Uwaga 18. Raguły de L'Hospitala są ważne równiez dla granic jednostronnych oraz granic w nieskończoności

Przykłady

Przykład 19. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x} \cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-1/2}} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1/x}{(-1/2)\cdot x^{-3/2}} =$
$-2 \cdot \lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0.$

Definicje pochodnych wyższych rzędów

Definicja 20. 1. Niech funkcja $f(x)$ będzie różniczkowalna w otoczeniu punktu a. Jeżeli $f'(x)$ jest różniczkowalną w punkcie a, to pochodna $\left(f'\right)'(a)$ nazywa się *drugą pochodną* funkcji f w punkcie a. Oznaczenie $f''(a)$ lub $f^{(2)}(a)$. Funkcję f nazywamy *dwa razy różniczkowalną* w punkcie a.

2. Niech $n \geqslant 2$ i funkcja $f(x)$ będzie n razy różniczkowalna w otoczeniu punktu a, oraz pochodna $f^{(n)}$ będzie różniczkowalna w punkcie a. Wtedy funkcja f jest $(n+1)$ *razy różniczkowalna*funkcja różniczkowalna n razy w punkcie a oraz $f^{(n+1)}(a) = \left(f^{(n)}\right)'(a)$.

3. Alternatywne oznaczenia: $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$, $\quad y''(t) = \ddot{y}(t)$.

Pochodne wyższych rzędów sumy, ilorazu i iloczynu

Twierdzenie 21. *Niech funkcje $f(x)$ oraz $g(x)$ będą n razy różniczkowalne w punkcie a. Wtedy $f \pm g$ też będzie n razy różniczkowalną funkcją oraz $\big(f \pm g\big)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$.*

Dowód. Indukcja □

Twierdzenie 22 (Leibniz)**.** *Niech funkcje $f(x)$ oraz $g(x)$ będą n razy różniczkowalne w punkcie a. Wtedy $f \cdot g$ też będzie n razy różniczkowalną funkcją oraz $\big(f \cdot g\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$.*

Dowód. Indukcja □

Pochodne wyższych rzędów funkcji elementarnych

Twierdzenie 23. *1.* $\left(x^\alpha\right)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$,

2. $\left(x^n\right)^{(n)} = n!$,

3. $\left(x^n\right)^{(n+1)} = 0$,

4. $\left(a^x\right)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a$,

5. $\left(\ln(1+x)\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$,

6. $\left(\sin x\right)^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi}{2}n)$,

7. $\left(\cos x\right)^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi}{2}n)$,

8. $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}n!(ad-bc)(cx+d)^{-(n+1)} \cdot c^{n-1}$.

Dowód. Indukcja $\square$

Wzór Taylora

Twierdzenie 24 (Taylor-Lagrange). *Niech funkcja $f(x)$ będzie $(n+1)$ razy różniczkowalną w otoczeniu punktu a. Wtedy $\forall x$ z tego otoczenia $\exists \xi$ pomiędzy a a x, takie że*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x), \quad (1)$$

gdzie $R_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Dowód twierdzenia Taylora-Lagrange'a

Dowód.

- Ustalmy punkt x.
- Rozważmy funkcję $\psi(t) = -f(x) + \varphi(x,t) + \frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}} R_{n+1}(x)$, gdzie
  - $\varphi(x,t) =$
    $f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$,
  - $R_{n+1}(x) =$
    $f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$
- Funkcja $\psi(t)$ spełnia warunki twierdzenia Rolle'a.
- Więc istnieje punkt ξ pomiędzy a a x, taki że $\psi'(\xi) = 0$.

–verte–

Twierdzenie Taylora-Lagrange'a, cd

Dowód. cd.

- $\psi'(\xi) =$
$$f'(\xi) + \frac{f''(\xi)}{1!}(x-\xi) - \frac{f'(\xi)}{1!} + \frac{f^3(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 - \frac{f''(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n - \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1} - (n+1)\frac{(x-\xi)^n}{(x-a)^{n+1}}R_{n+1}(x).$$

- Wynika stąd, że $\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1} = (n+1)\frac{(x-\xi)^n}{(x-a)^{n+1}}R_{n+1}(x).$

$\square$

Twierdzenie Taylora-Peano

Twierdzenie 25 (Taylor-Peano)**.** *Niech funkcja $f(x)$ będzie $(n-1)$ razy różniczkowalną w otoczeniu punktu a i ma pochodną rzędu n w punkcie a. Wtedy*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \tag{2}$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big). \tag{3}$$

Uwaga 26. Wzór 1 dla $a = 0$ nazywa się *wzorem Maclaurina.*

Wzór Maclaurina funkcji elementarnych

Twierdzenie 27. *1.* $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$,

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})$,

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k})$,

4. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$,

5. $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^2 + o(x^n)$.

Wniosek 28 (dwumian Newtona)**.** $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$.

Zastosowania drugiej pochodnej

Twierdzenie 29 (Dostateczy warunek ekstremum)**.** *Niech funkcja* $f(x)$ *będzie różniczkowalną w otoczeniu punktu* a *i ma drugą pochodną w punkcie* a*. Wtedy, jeżeli* $f'(a) = 0$ *oraz* $f'(a) > 0$ *(*$f'(a) < 0$*), to funkcja* $f(x)$ *ma w punkcie* A *lokalne minimum (maksimum).*

Dowód.

$$f(a + \alpha) = f(a) + f'(a)\alpha + f''(a)\alpha^2 + o(\alpha^2) =$$

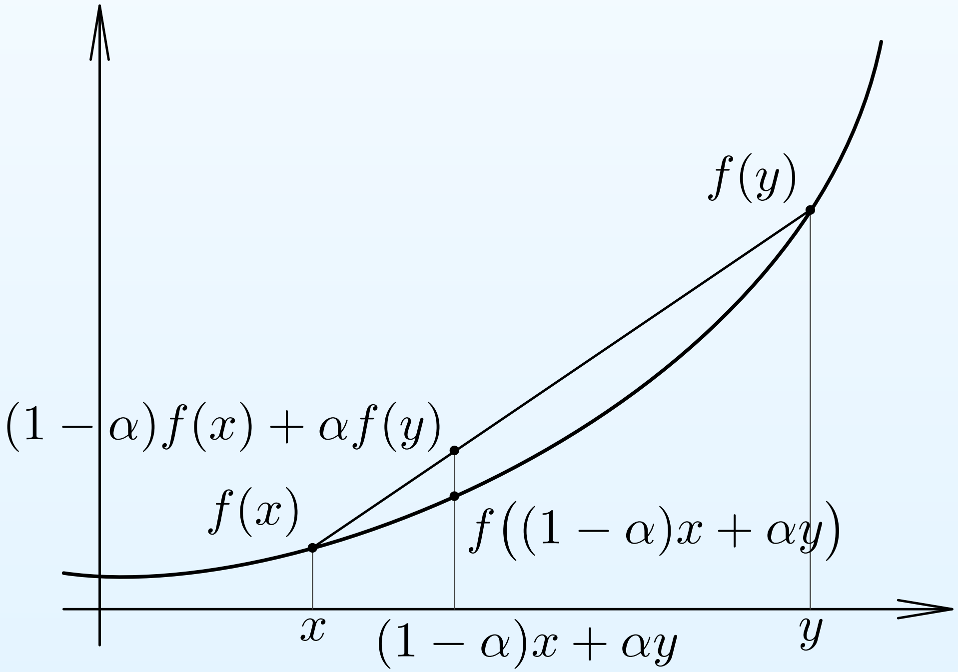
$$= f(a) + (f''(a) + o(1))\alpha^2$$

$\square$

Funkcje wypukłe

Definicja 30. Funkcja $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ nazywa się *wypukłą* na odcinku $[a, b]$, jeżeli $\forall x, y \in [a, b], \forall \alpha \in [0, 1]$

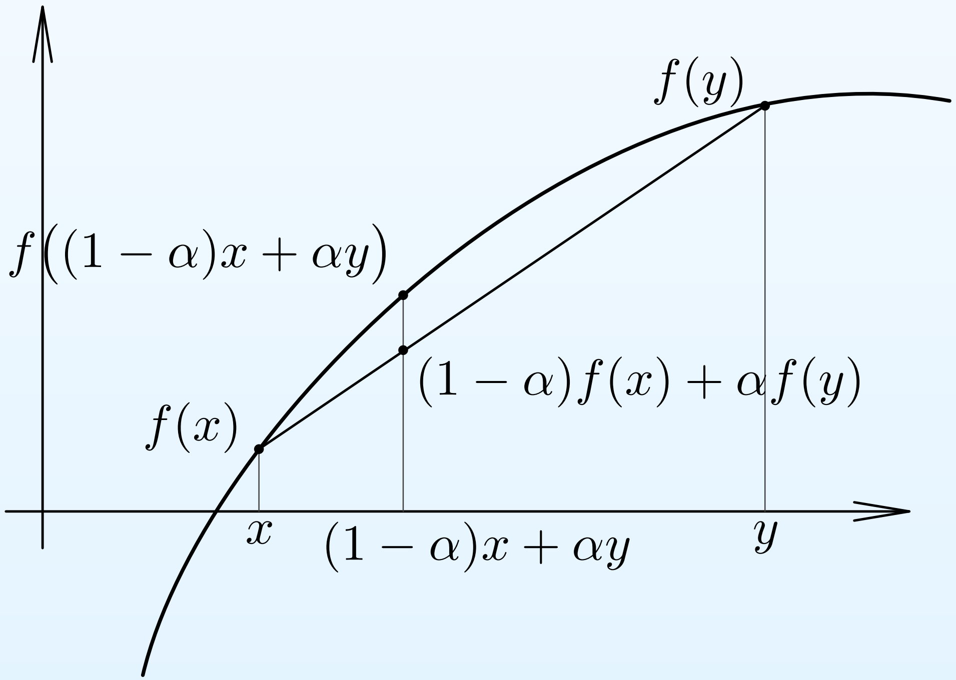
$$f\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) \leqslant (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$$



Funkcje wklęsłe

Definicja 31. Funkcja $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ nazywa się *wklęsłą* na odcinku $[a, b]$, jeżeli $\forall x, y \in [a, b], \forall \alpha \in [0, 1]$

$$f\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) \geqslant (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$$



Dostateczny warunek wypukłości

Twierdzenie 32. *Niech funkcja $f(x)$ będzie ciągła na odcinku $[a,b]$, dwa razy różniczkowalną na (a,b) i w każdym punkcie $x \in (a,b)$ spełniona jest nierówność $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$). Wtedy funkcja $f(x)$ jest wypukła (wklęsła) na $[a,b]$.*

Dowód. Niech $t = (1-\alpha)x + \alpha y$. Wtedy $y - t = (1-\alpha)(y-x)$, $x - t = -\alpha(y-x)$.

$$f(y) = f(t) + f'(t)(1-\alpha)(y-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)\big((1-\alpha)(y-x)\big)^2$$

$$f(x) = f(t) - f'(t)\alpha(y-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)\big(\alpha(y-x)\big)^2$$

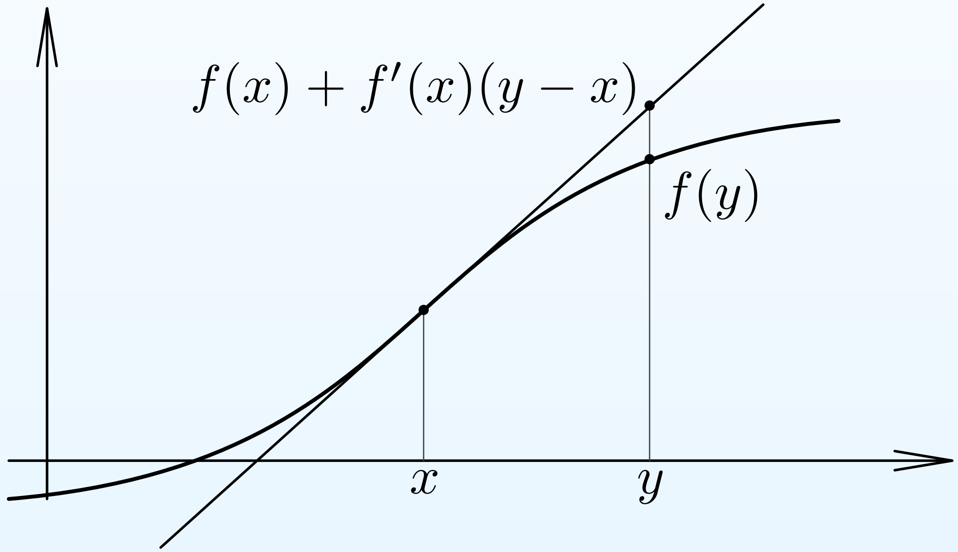
$$(1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) = f(t) +$$

$$+\frac{1}{2}\Big((1-\alpha)f''(\xi_2)\big(\alpha(y-x)\big)^2 + \alpha f''(\xi_1)\big((1-\alpha)(y-x)\big)^2\Big)$$

□

Punkty przegięcia

Definicja 33. Niech funkcja $f(x)$ będzie ciągła na odcinku $[a, b]$ oraz różniczkowalną na (a, b). Punkt $x \in (a, b)$ nazywa się *punktem przegięcia*, jeżeli styczna w tym punkcie przechodzi z jednej strony wykresu na drugą.



- $f(y) < f(x) + f'(x)(y - x)$ dla $y > x$
- $f(y) > f(x) + f'(x)(y - x)$ dla $y < x$
- lub odwrotnie

Warunek konieczny punktu przegięcia

Twierdzenie 34. *Niech funkcja f będzie ciągła i różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0 oraz ma drugą pochodną w x_0. Wtedy, jeżeli x_0 jest punktem przegięcia, to $f''(x_0) = 0$.*

Dowód.

- $F(x) = f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\big)$ zmienia znak w x_0.
- Więc nie może mieć ekstremum lokalnego w x_0.
- $F'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$.
- $F''(x_0) = f''(x_0)$. Gdyby $f''(x_0)$ nie było by równe 0, $F(x)$ by miała ekstremum lokalne w x_0.

$\square$

Dostateczny warunek punktu przegięcia

Twierdzenie 35. *Niech funkcja f będzie dwa razy różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0 oraz to f'' zmienia znak w x_0. Wtedy x_0 jest punktem przegięcia.*

Dowód.

- Pochodna funkcji $F(x) = f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\big)$ ma ekstremum lokalne w x_0.
- $F'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$.
- Więc w sąsiedztwie x_0 pochodna jest tego samego znaku.
- W taki sposób, w punkcie x_0 funkcja $F(x)$ rośnie (lub maleje).

$\square$

Dostateczny warunek punktu przegięcia — II

Twierdzenie 36. *Niech funkcja f będzie trzy razy różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0 oraz to $f''(x_0) = 0$ i $f^{(3)}(x_0) \neq 0$. Wtedy x_0 jest punktem przegięcia.*

Dowód.

- $f''(x_0) = 0$ oraz jest monotoniczna w otoczeniu x_0.
- Więc w x_0 zmienia znak.

$\square$

Badanie przebiegu zmienności funkcji

1. Dziedzina funkcji,
2. Okres, parzystość, nieparzystość,
3. Punkty przecięcia osi,
4. Asymptoty,
   (a) pionowe,
   (b) poziome,
   (c) ukośne.
5. Ekstrema lokalne.
6. Punkty przegięcia,

Badanie przebiegu zmienności funkcji. Przykłady

1. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
2. $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$