

Matematyka
Całka nieokreślona

Aleksander Denisiuk

denisjuk@euh-e.edu.pl

Elbląska Uczelnia Humanistyczno-Ekonomiczna

ul. Lotnicza 2

82-300 Elbląg

Całka nieokreślona

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

<http://denisjuk.euh-e.edu.pl/>

Funkcja pierwotna

Definicja 1. Funkcja $F(x)$ jest *pierwotną funkcją* dla funkcji $f(x)$ na przedziale (a, b) , jeśli $\forall x \in (a, b)$ funkcja F jest różniczkowalna w tym punkcie oraz $F'(x) = f(x)$.

Przykład 2. 1. $F(x) = \sqrt{1 - x^2}$ jest pierwotną dla $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ na przedziale $(-1, 1)$.

2. $F(x) = \sin x$ jest pierwotną dla $f(x) = \cos x$ na \mathbb{R} .

3. $F(x) = \ln x$ jest pierwotną dla $f(x) = \frac{1}{x}$ na przedziale $(0, +\infty)$.

Funkcje pierwotne

- Jeżeli $F(x)$ jest pierwotną dla $f(x)$, to $\forall C \in \mathbb{R} \quad F(x) + C$ też jest pierwotną dla $f(x)$.
- W taki sposób można otrzymać wszystkie funkcje pierwotne.

Twierdzenie 3. Niech funkcje $F_1(x)$ i $F_2(x)$ będą pierwotnymi dla $f(x)$ na przedziale (a, b) . Wtedy istnieje $C \in \mathbb{R}$, taka, że $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Wniosek 4. Jeżeli $F(x)$ jest jedną z funkcji pierwotnych dla $f(x)$ na przedziale (a, b) , to dowolna funkcja $\Phi(x)$, pierwotna dla $f(x)$ na (a, b) ma kształt $\Phi(x) = F(x) + C$, gdzie C jest stałą.

Całka nieoznaczona

Definicja 5. Zbiór wszystkich funkcji pierwotnych dla danej funkcji $F(x)$ na przedziale (a, b) nazywa się *całką nieoznaczoną* funkcji $f(x)$. Oznaczenie $\int f(x) dx$.

- Jeżeli $F(x)$ jest funkcją pierwotną dla $f(x)$ na przedziale (a, b) , to $\int f(x) dx = F(x) + C$.

Przykład 6. 1. $\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sqrt{1-x^2} + C$ na przedziale $(-1, 1)$.

2. $\int \cos x dx = \sin x + C$ na prostej \mathbb{R} .

Własności całki nieoznaczonej

1. $[\int f(x) dx]' = f(x),$
2. $\int F'(x) dx = F(x) + C,$
3. $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx,$
4. $\int (\lambda \cdot f(x)) dx = \lambda \cdot \int f(x) dx,$ gdzie $\lambda \in \mathbb{R},$
5. $\int 0 dx = C, \quad \int 1 dx = x + C,$
6. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$ gdzie $\alpha \neq -1,$
7. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C,$ gdzie $x \neq 0,$
8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$ gdzie $0 < a \neq 1,$
9. $\int e^x dx = e^x + C,$
10. $\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C,$

Własności całki nieoznaczonej, cd

$$12. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \text{ gdzie } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$13. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + C, \text{ gdzie } x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \text{ gdzie } x \in (-1, 1),$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C, \text{ gdzie } x \in (-1, 1),$$

$$16. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$17. \int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$18. \int \sinh x \, dx = \cosh x + C,$$

$$19. \int \cosh x \, dx = \sinh x + C,$$

$$20. \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C,$$

$$21. \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{ctgh} x + C, \text{ gdzie } x \neq 0.$$

Przykłady

Przykład 7 (Całki, których nie można wyrazić przez funkcje elementarne).

1. $\int e^{-x^2} dx,$

2. $\int \cos(x^2) dx,$

3. $\int \sin(x^2) dx,$

4. $\int \frac{dx}{\ln x}, 0 < x \neq 1,$

5. $\int \frac{\sin x}{x} dx,$

6. $\int \frac{\cos x}{x} dx, x \neq 0.$

Zamiana zmiennej w całce nieoznaczonej

Twierdzenie 8. Niech funkcja $t = \varphi(x)$ będzie różniczkowalna na przedziale (α, β) , funkcja $G(t)$ będzie pierwotną dla $g(t)$ na przedziale (a, b) , gdzie $(a, b) = \varphi((\alpha, \beta))$. Wtedy na przedziale (α, β)

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x) dx = G(\varphi(x)) + C.$$

Przykłady

Przykład 9. 1. $\int \sin 3x \, dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x \\ dt = 3dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{3} \sin t \, dt =$
 $-\frac{1}{3} \cos t + C = -\frac{1}{3} \cos 3x + C.$

2. $\int \frac{dx}{x+a} = \left| \begin{array}{l} t = x + a \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |x + a| + C,$
 $x \neq -a.$

3. $\int e^{\cos x} \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{array} \right| = -\int e^t \, dt = -e^t + C =$
 $-e^{\cos x} + C.$

Przykłady, cd

Przykład 10. 1.
$$\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^{100}}{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} x \\ dt = \frac{dx}{1+x^2} \end{array} \right| = \int t^{100} dt =$$
$$\frac{t^{101}}{101} + C = \frac{(\operatorname{arctg} x)^{101}}{101} + C.$$

2.
$$\int (5x - 6)^{2003} dx = \left| \begin{array}{l} t = 5x - 6 \\ dt = 5 dx \end{array} \right| = \frac{1}{5} \int t^{2003} dt = \frac{t^{2004}}{10\,020} + C =$$
$$\frac{(5x-6)^{2004}}{10\,020} + C,$$

Całkowanie przez części

Twierdzenie 11. *Niech funkcje $u(x)$ oraz $v(x)$ będą różniczkowalne na przedziale (a, b) i dla funkcji $u'(x)v(x)$ istnieje funkcja pierwotna na tym przedziale. Wtedy dla funkcji $u(x)v'(x)$ istnieje funkcja pierwotna oraz*

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

Przykłady — I

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u(x) = x^2 & v'(x) = \cos x \\ u'(x) = 2x & v(x) = \sin x \end{array} \right| = \\ &= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u(x) = x & v'(x) = \sin x \\ u'(x) = 1 & v(x) = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x \, dx = \\ &= (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C.\end{aligned}$$

Przykłady — II

$$\begin{aligned}\int x^n \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u(x) = \ln x \quad v'(x) = x^n \\ u'(x) = \frac{1}{x}, \quad v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{array} \right| = \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n \, dx = \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C,\end{aligned}$$

$n \neq -1.$

Przykłady — III

$$\begin{aligned}\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx &= \left| \begin{array}{l} u(x) = e^{\alpha x} \quad v'(x) = \cos \beta x \\ u'(x) = \alpha e^{\alpha x} \quad v(x) = \frac{\sin \beta x}{\beta} \end{array} \right| = \\ &= \frac{e^{\alpha x} \sin \beta x}{\beta} - \int \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u(x) = e^{\alpha x} \quad v'(x) = \sin \beta x \\ u'(x) = \alpha e^{\alpha x} \quad v(x) = -\frac{\cos \beta x}{\beta} \end{array} \right| = \\ &= \frac{e^{\alpha x} \sin \beta x}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos \beta x - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx,\end{aligned}$$

więc $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x} + C.$