

*Matematyka*  
*Całka oznaczona*

Aleksander Denisiuk

denisjuk@euh-e.edu.pl

Elbląska Uczelnia Humanistyczno-Ekonomiczna

ul. Lotnicza 2

82-300 Elbląg

## Całka oznaczona

---

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

<http://denisjuk.euh-e.edu.pl/>

## Definicja całki oznaczonej

Niech  $f(x)$  będzie funkcją ograniczoną na skończonym przedziale  $[a, b]$ .

**Definicja 1.** 1. Niech dane będą punkty  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .  
Mówimy wówczas, że określony jest *podział*  $P_n$  przedziału  $(a, b)$ .

2. Przedziały  $[x_{i-1}, x_i]$ , gdzie  $i = 1, 2, \dots, n$ , nazwiemy *przedziałami cząstkowymi* podziału.

3. Długości przedziałów  $[x_i, x_{i-1}]$  oznaczamy przez  $\Delta_i$  ( $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ ), a maksymalną z nich,  $\Delta(P_n) = \max_{i=1, \dots, n} \Delta_i$   
nazwiemy *średnicą podziału*  $P_n$ .

## Definicja całki oznaczonej, cd

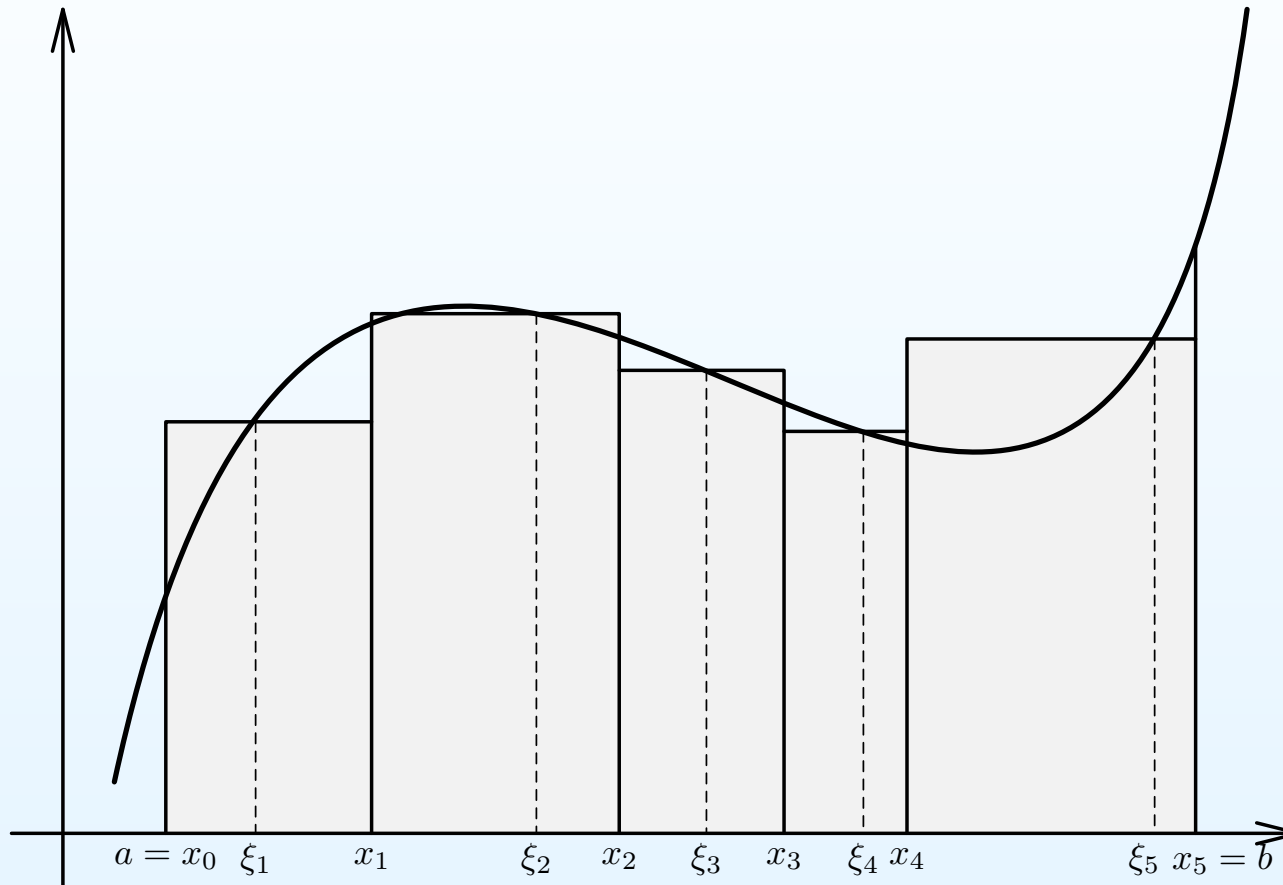
4. Niech dane będą również węzły  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , gdzie  $i = 1, \dots, n$ . Sumę  $S(f, P_n) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i$  nazwiemy *sumą całkową*.

5. Granicę (o ile istnieje)  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta(P_n) \rightarrow 0}} S(f, P_n)$  nazwiemy *całką*

*oznaczoną (całką Riemanna)*, oznaczamy  $\int_a^b f(x) dx$ .

Funkcja  $f(x)$  nazywa się wówczas *całkowalną* na przedziale  $[a, b]$ .

## Sens geometryczny całki oznaczonej



Rysunek 1: Sens geometryczny całki Riemanna

## Sens geometryczny całki oznaczonej, cd

Niech będzie  $f(x) \geq 0$  dla  $x \in [a, b]$ . Suma całkowita, odpowiadająca podziałowi  $P_n$  i wyborowi węzłów  $\xi_i$  równa jest polu figury, złożonej z prostokątów, zobacz rysunek 1. Granica pól takich figur, czyli całka zgadza się z polem *trapezu krzywoliniowego*, i.e., obszaru ograniczonego łukiem krzywej  $y = f(x)$ , odcinkiem osi  $Ox$  oraz prostymi  $x = a$  i  $x = b$ . Jeżeli zaś w przedziale  $[a, b]$  jest  $f(x) \leq 0$ , to analogiczne pole równa się

$$- \int_a^b f(x) dx.$$

## Klasy funkcji całkowlanych

---

**Twierdzenie 2.** *Ciągła w przedziale  $[a, b]$  funkcja jest całkowlana.*

**Twierdzenie 3.** *Funkcja ograniczona i ciągła w przedziale  $[a, b]$  z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów jest całkowlana.*

**Twierdzenie 4.** *Monotoniczna w przedziale  $[a, b]$  funkcja jest całkowlana.*

## Suma i różnica całek

**Twierdzenie 5.** Niech funkcje  $f(x)$  i  $g(x)$  będą całkowalne w przedziale  $[a, b]$ . Wtedy  $f(x) \pm g(x)$  będzie funkcją całkowalną oraz

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

*Dowód.* Rozważmy sumy całkowe:

$$\begin{aligned} S(f \pm g, P_n) &= \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) \pm g(\xi_i)) \Delta_i = \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i \pm \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta_i = S(f, P_n) \pm S(g, P_n). \end{aligned}$$

□

## Liniowość całki względem mnożenia przez liczbę

---

**Twierdzenie 6.** *Niech funkcja  $f(x)$  będzie całkowlaną w przedziale  $[a, b]$ .  
Wtedy  $\lambda f(x)$ , gdzie  $\lambda \in \mathbb{R}$  będzie funkcją całkowlaną oraz*

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

*Dowód.* analogicznie do twierdzenia 5



## Własności funkcji całkownych

---

**Twierdzenie 7.** *Niech funkcje  $f(x)$  i  $g(x)$  będą całkowne w przedziale  $[a, b]$ . Wtedy  $f(x) \cdot g(x)$  będzie funkcją całkowną.*

**Twierdzenie 8.** *Niech funkcja  $f(x)$  będzie całkowna w przedziale  $[a, b]$ . Wtedy  $|f(x)|$  też będzie funkcją całkowną.*

**Twierdzenie 9.** *Niech funkcja  $f(x)$  będzie całkowną w przedziale  $[a, b]$ . Wtedy  $f(x)$  będzie całkowną w dowolnym przedziale  $[c, d] \subset [a, b]$ .*

## Własności funkcji całkownych, cd.

**Definicja 10.** Umówmy się, że dla funkcji  $f(x)$ , całkownej w przedziale  $[a, b]$

$$1. \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$2. \int_a^a f(x) dx = 0.$$

**Twierdzenie 11.** Niech funkcja  $f(x)$  będzie całkowną w przedziałach  $[a, c]$  oraz  $[c, b]$ . Wtedy  $f(x)$  będzie całkowną w przedziale  $[a, b]$  oraz

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

## Oszacowanie całek

**Twierdzenie 12.** Niech funkcja  $f(x)$  będzie całkowalną w przedziale  $[a, b]$

oraz  $f(x) \geq 0$  przy  $x \in [a, b]$ . Wtedy  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

*Dowód.*

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i \geq 0.$$

□

**Wniosek 13.** Niech funkcje  $f(x)$  i  $g(x)$  będą całkowalne w przedziale  $[a, b]$

oraz  $f(x) \geq g(x)$  przy  $x \in [a, b]$ . Wtedy  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$ .

**Wniosek 14.** Niech funkcja  $f(x)$  będzie całkowalna w przedziale  $[a, b]$ .

Wtedy  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ .

## Oszacowanie całek, cd.

---

**Twierdzenie 15.** Niech funkcja  $f(x)$  będzie całkowalna w przedziale  $[a, b]$ ,  
 $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ ,  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ . Wtedy  $\exists \mu$ ,  $m \leq \mu \leq M$ , takie że

$$\int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b - a).$$

## Całka oznaczona a całka nieoznaczona

**Twierdzenie 16.** Niech funkcją  $f(x)$  będzie ciągłą w przedziale  $[a, b]$ . Wtedy

$\int_a^x f(t) dt$  jest funkcją pierwotną dla  $f(x)$ .

**Wniosek 17.** Niech funkcją  $f(x)$  będzie ciągłą w przedziale  $[a, b]$ . Wtedy istnieje funkcja pierwotna dla  $f(x)$ .

**Wniosek 18** (Twierdzenie Newtona-Leibniza). Niech funkcją  $f(x)$  będzie ciągłą w przedziale  $[a, b]$ ,  $F(x)$  będzie funkcją pierwotną. Wtedy

$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$ , gdzie użyto oznaczenie  $F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ .

*Dowód.*  $F(x) = \int_a^x f(t) dt + C$ .

□

## Przykłady

$$1. \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}, \quad n \neq -1,$$

$$2. \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 2,$$

$$3. \int_0^1 4 \frac{dx}{1+x^2} = 4 \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \pi.$$

## Zamiana zmiennej w całce oznaczonej

**Twierdzenie 19.** Niech funkcja  $\varphi'(x)$  będzie ciągłą w przedziale  $[\alpha, \beta]$ , funkcja  $\varphi(x)$  będzie monotoniczną w tym przedziale, a  $g(t)$  będzie ciągłą

w przedziale  $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$ . Wtedy 
$$\int_{\alpha}^{\beta} g(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} g(x) dx.$$

*Dowód.* Niech  $G(x)$  będzie funkcją pierwotną dla  $g(x)$ . Wtedy  $G(\varphi(t))$  będzie funkcją pierwotną dla  $g(\varphi(t))$ . □

## Przykłady

$$1. \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{\sqrt{8}-1}{3}.$$

$$2. \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi/2} \sin x (1 - \cos^2 x) dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = -\int_1^0 (1 - t^2) dt = \left( \frac{1}{3} t^3 - t \right) \Big|_1^0 = \frac{2}{3}.$$

## Całkowanie przez części w całce oznaczonej

**Twierdzenie 20.** Niech funkcje  $u'(x)$  oraz  $v'(x)$  będą ciągłe w przedziale  $[a, b]$ . Wtedy

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

**Przykład 21.**  $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u(x) = x \quad v'(x) = \cos x \\ u'(x) = 1 \quad v(x) = \sin x \end{array} \right| =$

$$x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

## Całki niewłaściwe

**Definicja 22** (Całki funkcji nieograniczonych). Niech funkcja  $f(x)$  będzie całkowna w każdym przedziale  $[a, b - \varepsilon]$  ( $\varepsilon > 0$ ). Wtedy

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

**Definicja 23** (Całki w przedziale nieskończonym). Niech funkcja  $f(x)$  będzie całkowna w każdym przedziale  $[a, N]$  ( $N > a$ ). Wtedy

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N f(x) dx$$

## Przykłady całek niwłaściwych

**Przykład 24.** 1.  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda} = \begin{cases} \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Big|_0^1, & \lambda \neq -1 \\ \ln x \Big|_0^1, & \lambda = -1 \end{cases} =$

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Big|_\varepsilon^1, & \lambda \neq -1 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln x \Big|_\varepsilon^1, & \lambda = -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\lambda}, & \lambda < 1 \\ \infty, & \lambda \geq 1 \end{cases}$$

2.  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^N = \frac{\pi}{2}$

3.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \begin{cases} \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Big|_1^\infty, & \lambda \neq -1 \\ \ln x \Big|_1^\infty, & \lambda = -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda-1}, & \lambda > 1 \\ \infty, & \lambda \leq 1 \end{cases}$