Matematyka

Całka oznaczona

Aleksander Denisiuk

`denisjuk@euh-e.edu.pl`

Elbląska Uczelnia Humanistyczno-Ekonomiczna

ul. Lotnicza 2

82-300 Elbląg

Całka oznaczona

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

`http://denisjuk.euh-e.edu.pl/`

Definicja całki oznaczonej

Niech $f(x)$ będzie funkcją ograniczoną na skończonym przedziale $[a, b]$.

Definicja 1. 1. Niech dane będą punkty $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Mówimy wówczas, że określony jest *podział* P_n *przedziału* (a, b).

2. Przedziały $[x_{i-1}, x_i]$, gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$, nazwiemy *przedziałami cząstkowymi* podziału.

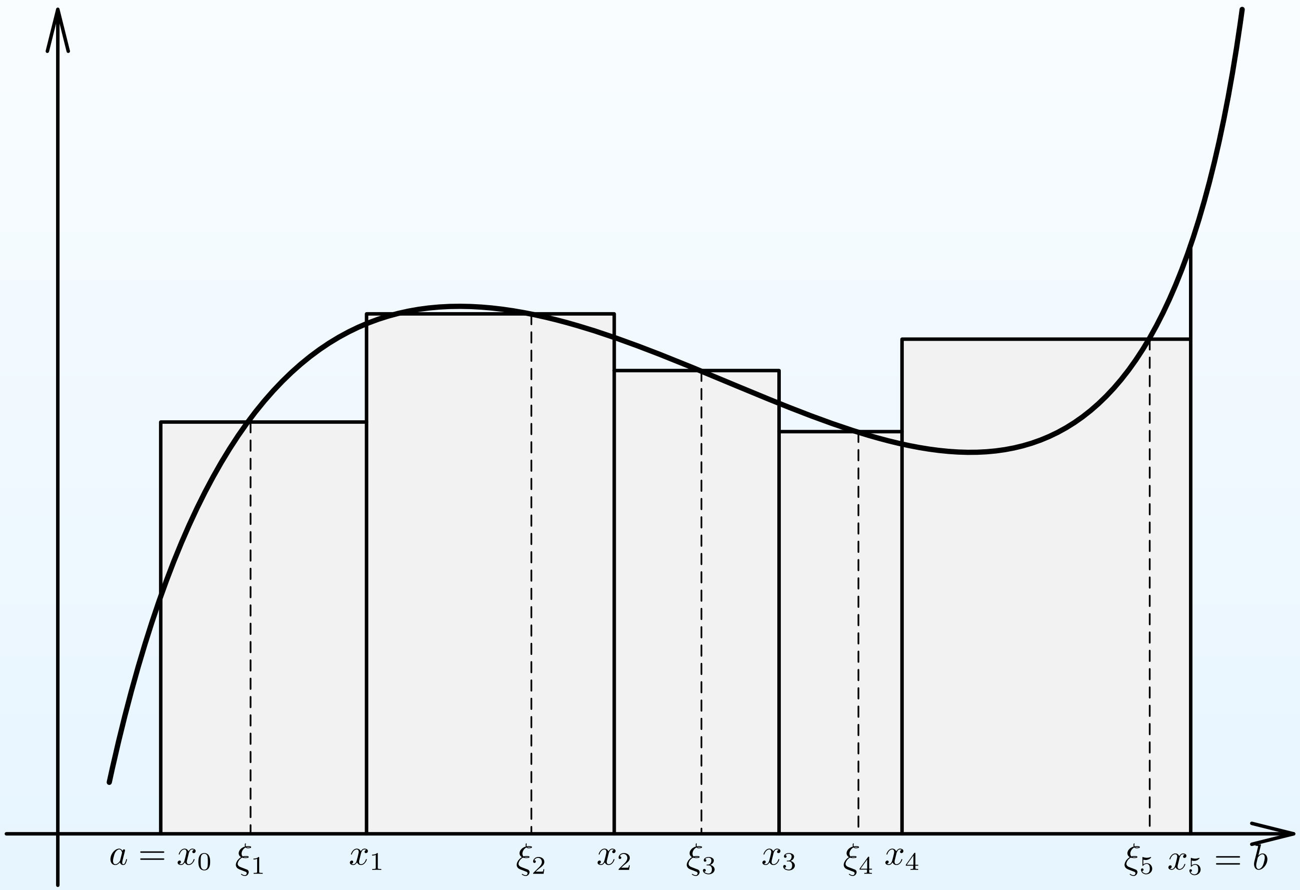
3. Długości przedziałów $[x_i, x_{i-1}]$ oznaczamy przez Δ_i ($\Delta_i = x_i - x_{i-1}$), a maksymalną z nich, $\Delta(P_n) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta_i$ nazwiemy *średnicą podziału* P_n.

Definicja całki oznaczonej, cd

4. Niech dane będą również *węzły* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, gdzie $i = 1, \ldots, n$. Sumę $S(f, P_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i$ nazwiemy *sumą całkową*.
5. Granicę (o ile istnieje) $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \Delta(P_n)\to 0}} S(f, P_n)$ nazwiemy *całką oznaczoną (całką Riemanna),* oznaczamy $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

   Funkcja $f(x)$ nazywa się wówczas *całkowalną* na przedziale $[a, b]$.

Sens geometryczny całki oznaczonej



Rysunek 1: Sens geometryczny całki Riemanna

Sens geometryczny całki oznaczonej, cd

Niech będzie $f(x) \geqslant 0$ dla $x \in [a, b]$. Suma całkowa, odpowiadająca podziałowi P_n i wyborowi węzłów ξ_i równa jest polu figury, złożonej z prostokątów, zobacz rysunek 1. Granica pól takich figur, czyli całka zgadza się z polem *trapezu krzywoliniowego,* i.e., obszaru ograniczonego łukiem krzywej $y = f(x)$, odcinkiem osi Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$.
Jeżeli zaś w przedziale $[a, b]$ jest $f(x) \leqslant 0$, to analogiczne pole równa się

$$-\int_a^b f(x)\, dx.$$

Klasy funkcji całkowalnych

Twierdzenie 2. *Ciągła w przedziale* $[a, b]$ *funkcja jest całkowalna.*

Twierdzenie 3. *Funkcja ograniczona i ciągła w przedziale* $[a, b]$ *z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów jest całkowalna.*

Twierdzenie 4. *Monotoniczna w przedziale* $[a, b]$ *funkcja jest całkowalna.*

Suma i różnica całek

Twierdzenie 5. *Niech funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą całkowalne w przedziale $[a,b]$. Wtedy $f(x) \pm g(x)$ będzie funkcją całkowalną oraz $\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$.*

Dowód. Rozważmy sumy całkowe:

$$S(f \pm g, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(\xi_i) \pm g(\xi_i)\big)\Delta_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta_i = S(f, P_n) \pm S(g, P_n).$$

$\square$

Liniowość całki względem mnożenia przez liczbę

Twierdzenie 6. *Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowalną w przedziale $[a, b]$. Wtedy $\lambda f(x)$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną oraz $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.*

Dowód. analogicznie do twierdzenia 5 □

Własności funkcji całkowalnych

Twierdzenie 7. *Niech funkcje* $f(x)$ *i* $g(x)$ *będą całkowalne w przedziale* $[a, b]$. *Wtedy* $f(x) \cdot g(x)$ *będzie funkcją całkowalną.*

Twierdzenie 8. *Niech funkcja* $f(x)$ *będzie całkowalna w przedziale* $[a, b]$. *Wtedy* $\left|f(x)\right|$ *też będzie funkcją całkowalną.*

Twierdzenie 9. *Niech funkcja* $f(x)$ *będzie całkowalną w przedziale* $[a, b]$. *Wtedy* $f(x)$ *będzie całkowalną w dowolnym przedziale* $[c, d] \subset [a, b]$.

Własności funkcji całkowalnych, cd.

Definicja 10. Umówmy się, że dla fukcji $f(x)$, całkowalnej w przedziale $[a, b]$

1. $\int\limits_b^a f(x)\, dx = -\int\limits_a^b f(x)\, dx$
2. $\int\limits_a^a f(x)\, dx = 0.$

Twierdzenie 11. *Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowalną w przedziałach $[a, c]$ oraz $[c, b]$. Wtedy $f(x)$ będzie całkowalną w przedziale $[a, b]$ oraz*

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx.$$

Oszacowanie całek

Twierdzenie 12. *Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowalną w przedziale $[a, b]$ oraz $f(x) \geqslant 0$ przy $x \in [a, b]$. Wtedy $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.*

Dowód.

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i \geqslant 0.$$

$\square$

Wniosek 13. *Niech funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą całkowalne w przedziale $[a, b]$ oraz $f(x) \geqslant g(x)$ przy $x \in [a, b]$. Wtedy $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.*

Wniosek 14. *Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowalna w przedziale $[a, b]$. Wtedy $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b \left|f(x)\right|\,dx$.*

Oszacowanie całek, cd.

Twierdzenie 15. *Niech funkcja* $f(x)$ *będzie całkowalna w przedziale* $[a, b]$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. *Wtedy* $\exists \mu$, $m \leqslant \mu \leqslant M$, *takie że*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu \cdot (b - a).$$

Całka oznaczona a całka nieoznaczona

Twierdzenie 16. *Niech funkcją $f(x)$ będzie ciągłą w przedziale $[a,b]$. Wtedy $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ jest funkcją pierwotną dla $f(x)$.*

Wniosek 17. *Niech funkcją $f(x)$ będzie ciągłą w przedziale $[a,b]$. Wtedy istnieje funkcja pierwotna dla $f(x)$.*

Wniosek 18 (Twierdzenie Newtona-Leibniza)**.** *Niech funkcją $f(x)$ będzie ciągłą w przedziale $[a,b]$, $F(x)$ będzie funkcją pierwotną. Wtedy $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$, gdzie użyto oznaczenie $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.*

Dowód. $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + C$. □

Przykłady

1. $\int\limits_0^1 x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}, \quad n \neq -1,$
2. $\int\limits_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = 2,$
3. $\int\limits_0^1 4\frac{dx}{1+x^2} = 4\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \pi.$

Zamiana zmiennej w całce oznaczonej

Twierdzenie 19. *Niech funkcja* $\varphi'(x)$ *będzie ciągłą w przedziale* $[\alpha, \beta]$*, funkcja* $\varphi(x)$ *będzie monotoniczną w tym przedziale, a* $g(t)$ *będzie ciągłą w przedziale* $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$*. Wtedy* $\int\limits_{\alpha}^{\beta} g(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} g(x)\,dx.$

Dowód. Niech $G(x)$ będzie funkcją pierwotną dla $g(x)$. Wtedy $G\big(\varphi(t)\big)$ będzie funkcją pierwotną dla $g(\varphi(t))$. $\square$

Przykłady

1. $\int\limits_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \left|\begin{matrix}1+x^2=t\\ 2x\,dx=dt\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{3/2}\Big|_1^2 =$ $\frac{\sqrt{8}-1}{3}$.

2. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x(1-\cos^2 x)\,dx = \left|\begin{matrix}\cos x=t\\ -\sin x\,dx=dt\end{matrix}\right| =$ $-\int\limits_1^0 (1-t^2)\,dt = (\frac{1}{3}t^3-t)\Big|_1^0 = \frac{2}{3}$.

Całkowanie przez części w całce oznaczonej

Twierdzenie 20. *Niech funkcje $u'(x)$ oraz $v'(x)$ będą ciągłe w przedziale $[a, b]$. Wtedy*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Przykład 21. $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \left| \begin{matrix} u(x) = x & v'(x) = \cos x \\ u'(x) = 1 & v(x) = \sin x \end{matrix} \right| =$

$x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$

Całki niewłaściwe

Definicja 22 (Całki funkcji nieograniconych)**.** Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowalna w każdym przedziale $[a, b - \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$). Wtedy

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

Definicja 23 (Całki w przedziale nieskończonym)**.** Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowalna w każdym przedziale $[a, N$ ($N > a$). Wtedy

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{N \to \infty} \int_a^N f(x)\,dx$$

Przykłady całek niwłaściwych

Przykład 24. 1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\lambda} = \begin{cases} \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\Big|_0^1, & \lambda \neq -1 \\ \ln x \Big|_0^1, & \lambda = -1 \end{cases} =$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\Big|_\varepsilon^1, & \lambda \neq -1 \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \ln x \Big|_\varepsilon^1, & \lambda = -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\lambda}, & \lambda < 1 \\ \infty, & \lambda \geqslant 1 \end{cases}$$

2. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^\infty = \lim\limits_{N\to\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^N = \frac{\pi}{2}$

3. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \begin{cases} \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\Big|_1^\infty & \lambda \neq -1 \\ \ln x \Big|_1^\infty, & \lambda = -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda-1}, & \lambda > 1 \\ \infty, & \lambda \leqslant 1 \end{cases}$