

Matematyka
Algebra liniowa

Aleksander Denisiuk

denisjuk@euh-e.edu.pl

Elbląska Uczelnia Humanistyczno-Ekonomiczna

ul. Lotnicza 2

82-300 Elbląg

Algebra linowa

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

<http://denisjuk.euh-e.edu.pl/>

Przykład układu równań liniowych

Przykład 1.

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

Macierze układu

Definicja 4. Tabela współczynników

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazywa się *macierzą* układu 1.

Definicja 5. Tabela współczynników i wyrazów wolnych

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

nazywa się *macierzą rozszerzoną* układu.

Wektory wyrazów wolnych, niewiadomych i rozwiązań

Definicja 6. Columna $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ nazywa się *wektorem wyrazów wolnych* układu 1.

Definicja 7. Columna $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ nazywa się *wektorem niewiadomych*.

Definicja 8. Columna $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ nazywa się *wektorem rozwiązań*.

Uwaga o zapisie wektorów

Uwaga 9. • Dla oszczędności miejsca wektory zapisywane są również jako wiersze:

- $b = (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m)$

- $x = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_m)$

- $x^0 = (x_1^0 \quad x_2^0 \quad \dots \quad x_m^0)$

- Żeby podkreślić, że to są wektory-kolumny, czasami używa się nawisów kwadratowych lub klamrowych oraz przecinków:

- $b = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m] = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$

- $x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_m] = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$

- $x^0 = [x_1^0 \quad x_2^0 \quad \dots \quad x_m^0] = \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0\}$

Klasyfikacja układów — ilość rozwiązań

Definicja 10. Układ 1 nazywa się

- *sprzecznym*, jeżeli on nie ma rozwiązań,
- *określonym*, jeżeli on ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- *nieokreślonym*, jeżeli on ma więcej niż jedno rozwiązanie.

Przykład 11. •
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = -1. \end{cases}$$

•
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

•
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 = 2. \end{cases}$$

Klasyfikacja układów — kształt macierzy

Definicja 12. Układ 1 (oraz macierz układu) nazywa się

- *kwadratowym*, jeżeli $m = n$ (ilość równań zgadza się z ilością niewiadomych),
- *diagonalnym (przekątnym)*, jeżeli w macierzy poza *główną przekątną* są same zera, $a_{ij} = 0$ dla $j \neq i$,
- *schodkowym (trójkątnym)*, jeżeli w macierzy pierwsze niezerowe elementy kolejnych niezerowych wierszy, znajdują się w coraz dalszych kolumnach.

Przykład 13. Na tablicy

Układy równoważne

Definicja 14. Dwa układy są *równoważne*, jeżeli zgadzają się zbiory ich rozwiązań.

- każde dwa sprzeczne układy są równoważne
- dla niesprzecznych układów U_1 i U_2 konieczne i wystarczające jest, aby każde rozwiązanie U_1 było rozwiązaniem U_2 i każde rozwiązanie U_2 było rozwiązaniem U_1

Przykład 15. Na tablicy

Przekształcenia elementarne

Definicja 16. Układ U_2 jest otrzymany z układu U_1 za pomocą *przekształcenia elementarnego*, jeśli

1. wszystkie równania układu U_2 oprócz równania i są niezmiennie, a równanie i zostało pomnożone przez niezerową liczbę α ,
2. wszystkie równania układu U_2 oprócz równań i i j są niezmiennie, a równania i i j zostały zamienione miejscami,
3. wszystkie równania układu U_2 oprócz równania j są niezmiennie, a do równania j zostało dodane równanie i , mnożone przez czynnik α .

Przekształcenie elementarne 1 na macierzy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \dots & \alpha a_{in} & \alpha b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

$$\alpha \neq 0.$$

Przekształcenie elementarne 2 na macierzy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \cdot$$

Przekształcenie elementarne 3 na macierzy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} + \alpha a_{i1} & a_{j2} + \alpha a_{i2} & \dots & a_{jn} + \alpha a_{in} & b_j + \alpha b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \cdot$$

Twierdzenia

Twierdzenie 17. *Przekształcenia elementarne są odwracalne*

Twierdzenie 18. *Jeżeli układ U_2 został otrzymany z układu U_1 za pomocą przekształceń elementarnych, to te dwa układy są równoważne*

Twierdzenie 19. *Każdy układ może zostać sprowadzony do postaci schodkowej za pomocą przekształceń elementarnych*

Twierdzenie 20 (Metoda eliminacji Gaussa). *Każda macierz może zostać sprowadzona do postaci schodkowej za pomocą przekształceń elementarnych*

Twierdzenie 21. *Każdy układ (każda macierz) może zostać sprowadzona do postaci schodkowej tylko za pomocą przekształceń elementarnych 2 i 3.*

Analiza układu schodkowego

Twierdzenie 23. *Układ 1 jest niesprzecznym wtedy i tylko wtedy, dgy równoważny jemu układ schodkowy 3 nie zawiera równań postaci $0 = \bar{b}_t$, gdzie $\bar{b}_t \neq 0$. Jeżeli warunek ten jest spełniony, to zmiennym wolnym można nadać dowolne wartości. Zmienne główne zostaną przez nie jednoznacznie określone z układu 3.*

Twierdzenie 24. *Niespreczny układ 1 jest określony wtedy i tylko wtedy, dgy w równoważnym jemu układzie schodkowym 3 spełniono jest $r = n$.*

Twierdzenie 25. *Niespreczny i nieokreślony układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.*

Wniosek 26. *Układ 1, w którym $m = n$ jest określony wtedy i tylko wtedy, dgy w równoważnym jemu układzie schodkowym 3 $a_{11}a_{22} \dots a_{nn} \neq 0$.*

Wniosek 27. *Układ 1, w którym $m = n$ jest określony wtedy i tylko wtedy, dgy powiązany z nim układ jednorodny ma tylko zerowe rozwiązanie.*

Wniosek 28. *Niespreczny układ 1, w którym $n > m$ jest nieokreślonym.*

Przykład

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2; \end{cases}$$

Wyznacznik macierzy 2×2

Definicja 29.

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Definicja 30. Wyznacznik $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ nazywa się *wyznacznikiem układu*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

Wzory Cramera — układ 2×2

Twierdzenie 31. *Rozwiązanie układu*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

dane jest wzorem

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Wzory Cramera — układ jednorodny

Twierdzenie 32. *Rozwiązanie układu*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \end{cases}$$

dane jest wzrem

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad x_2 = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Wyznacznik macierzy 3×3

Definicja 33.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} \end{aligned}$$

Wzory Cramera — układ 3×3

Twierdzenie 34. *Rozwiązanie układu*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

dane jest wzorem

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Definicja

Definicja 35. *Przestrzenią wektorową (liniową) nad ciałem liczb rzeczywistych \mathbb{R} nazywa się zbiór \mathcal{X} , w którym określone są dwie operacje: dodawanie elementów zbioru \mathcal{X} i mnożenie elementów zbioru \mathcal{X} przez liczby rzeczywiste w taki sposób, że są spełnione własności:*

- $\forall X, Y \in \mathcal{X} \quad X + Y = Y + X,$
- $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X} \quad (X + Y) + Z = X + (Y + Z),$
- $\exists 0 \in \mathcal{X}$, takie że $\forall X \in \mathcal{X} \quad X + 0 = 0 + X = X,$
- $\forall X \in \mathcal{X}, \exists (-X) \in \mathcal{X}$ takie że $X + (-X) = (-X) + X = 0,$
- $\forall X \in \mathcal{X}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha)(\beta X) = (\alpha\beta)X,$
- $\forall X \in \mathcal{X}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X,$
- $\forall X, Y \in \mathcal{X}, \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y,$
- $\forall X \in \mathcal{X}, \quad 1 \cdot X = X.$

Przykłady przestrzeni liniowych

- przestrzeń wektorów na płaszczyźnie, w przestrzeni trójwymiarowej

- $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\}$

- $(\mathbb{R}^n)^* = \{ (x_1, \dots, x_n) \}$

- \mathbb{W}_3 — wielomiany stopnia 3: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

- funkcje wymierne $\frac{P(x)}{Q(x)}$

- zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań

Elementarne własności

- $0 \cdot X = 0$
- $\alpha \cdot 0 = 0$
- $(-1) \cdot X = -X$
- $\alpha \cdot X = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ lub } X = 0$

Podprzestrzeń liniowa

Definicja 36. Niech \mathcal{X} będzie przestrzenią liniową. Niepusty podzbiór $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$, który sam jest przestrzenią liniową, nazywa się *podprzestrzenią* \mathcal{X} .

Twierdzenie 37. \mathcal{V} jest podprzestrzenią \mathcal{X} wtedy i tylko wtedy gdy

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathcal{V} \Rightarrow \alpha X \in \mathcal{V}$
2. $\forall X, Y \in \mathcal{V} \Rightarrow X + Y \in \mathcal{V}$

Lemat 38. Niech dane będą $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ — dwie podprzestrzenie liniowe \mathcal{X} wtedy $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ też jest podprzestrzenią liniową \mathcal{X} .

Uwaga 39. $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ nie koniecznie jest podprzestrzenią liniową \mathcal{X} .

Kombinacja liniowa

Definicja 40. Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Wektor

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k$$

nazywa się *kombinacją liniową* wektorów $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}$.

Twierdzenie 41. Niech dany będzie podzbiór $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}$. Zbiór wszystkich kombinacji liniowych elementów \mathcal{L} jest podprzestrzenią \mathcal{X} .

Definicja 42. Zbiór wszystkich kombinacji liniowych elementów $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}$ nazywamy *otoczką liniową* \mathcal{L} . Oznaczenia: $\text{span}(\mathcal{L})$, $\langle \mathcal{L} \rangle$.

Przykłady

$$\bullet \mathcal{U}_m = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}, \mathcal{V}_m = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

- $\mathcal{U}_m \cap \mathcal{V}_m = \{0\}$
- $\langle \mathcal{U}_m, \mathcal{V}_m \rangle = \mathbb{R}^n$

•

$$\{ E_1 = (1, 0, \dots, 0), E_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, E_n = (0, \dots, 0, 1) \}$$

- $\langle E_1, \dots, E_n \rangle = \mathbb{R}^n$

Liniowa niezależność

Definicja 43. Układ wektorów $\{X_1, \dots, X_k\}$ w przestrzeni liniowej \mathcal{X} nazwiemy układem *liniowo niezależnym*, jeżeli dla dowolnych współczynników $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, nie równych zemu jednocześnie $\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k \neq 0$.

Definicja 44. Układ wektorów, który nie jest liniowo niezależnym, nazywa się *liniowo zależnym*.

Liniowa niezależność, cd

- Twierdzenie 45.**
1. *Jeżeli układ $\{X_1, \dots, X_k\}$ ma liniowo zależny podukład, to on też jest liniowo zależnym*
 2. *Każdy podukład niezależnego liniowo układu $\{X_1, \dots, X_k\}$ jest liniowo niezależnym*
 3. *Jeżeli układ $\{X_1, \dots, X_k\}$ jest liniowo zależnym, to przynajmniej jeden z wektorów jest kombinacją liniową pozostałych*
 4. *Jeżeli jeden z wektorów $\{X_1, \dots, X_k\}$ jest liniową kombinacją pozostałych, to układ $\{X_1, \dots, X_k\}$ jest liniowo zależnym.*
 5. *Jeżeli układ $\{X_1, \dots, X_k\}$ jest liniowo niezależnym, a układ $\{X_1, \dots, X_k, X\}$ jest liniowo zależnym, to X jest kombinacją liniową $\{X_1, \dots, X_k\}$.*
 6. *Jeżeli $\{X_1, \dots, X_k\}$ jest liniowo niezależnym oraz X nie jest kombinacją liniową tego układu, to układ wektorów $\{X_1, \dots, X_k, X\}$ jest liniowo niezależnym*

Baza przestrzeni liniowej

Definicja 46. Niech \mathcal{X} będzie przestrzenią liniową. Układ wektorów $\{X_1, \dots, X_n\} \in \mathcal{X}$ przestrzeni X nazywa się *generującym*, jeżeli $\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \mathcal{X}$.

Definicja 47. Niech \mathcal{X} będzie przestrzenią liniową. Układ wektorów $\{X_1, \dots, X_n\} \in \mathcal{X}$ nazywa się *bazą* przestrzeni \mathcal{X} , jeżeli jest on niezależnym liniowo oraz $\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \mathcal{X}$.

Przykład 48. • $\{E_1, \dots, E_n\}$ jest *standardową* bazą w \mathbb{R}^n

- $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ jest bazą w przestrzeni wielomianów stopnia 4

Lemat 49. Niech $\{X_1, \dots, X_n\}$ będzie bazą przestrzeni \mathcal{X} . Wtedy każdy wektor $X \in \mathcal{X}$ może być jednoznacznie zapisany jako kombinacja liniowa $X = x_1 X_1 + \dots + x_n X_n$.

Definicja 50. Liczby (x_1, \dots, x_n) , określone w lemacie 49, nazywamy *współzrędnymi* wektora X w bazie $\{X_1, \dots, X_n\}$.

Wymiar przestrzeni liniowej

Lemat 51. Niech \mathcal{X} będzie przestrzenią liniową z bazą $\{X_1, \dots, X_n\}$. Niech $\{Y_1, \dots, Y_s\}$ będzie układem niezależnym liniowo. Wtedy $s \leq n$.

Wniosek 52. Niech \mathcal{X} będzie przestrzenią liniową z bazą $\{X_1, \dots, X_n\}$. Wtedy każda inna baza ma tyle samo elementów.

Definicja 53. Przestrzeń, która ma bazę skończoną nazywamy *skończeniem wymiarową*, a ilość elementów bazy — *wymiarem* przestrzeni, $\dim \mathcal{X}$

- $\dim \{0\} = 0$

Rząd układu wektorów

Definicja 54. *Rzędem* układu wektorów $\{X_1, \dots, X_n\}$ nazywamy wymiar jego otoczki liniowej.

$$\text{rank}(X_1, \dots, X_n) = \dim\langle X_1, \dots, X_n \rangle$$