Matematyka

Algebra linowa

Aleksander Denisiuk

`denisjuk@euh-e.edu.pl`

Elbląska Uczelnia Humanistyczno-Ekonomiczna

ul. Lotnicza 2

82-300 Elbląg

Algebra linowa

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

`http://denisjuk.euh-e.edu.pl/`

Przykład układu równań liniowych

Przykład 1.

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

Ogólny układ równań liniowych

Definicja 2. *Układem równań liniowych* nazywa się układ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

- a_{ij} — *współczynniki* układu 1,
- b_j — *wyrazy wolne*,
- *rozwiązaniem układu* nazywamy uporządkowaną n-tkę liczb $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, które po podstawieniu w miejsce x_i, do równań układu 1 dają równości prawdziwe.

Układ jednorodny

Definicja 3. Układ równań liniowych nazywamy *jednorodnym,* gdy wszystkie wyrazy wolne tego układu są równe zeru

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2}$$

- dla dowolnych wyrazów wolnych układ 2 nazywa sie *powiązanym* z układem 1

Macierze układu

Definicja 4. Tabela współczynników

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazywa się *macierzą* układu 1.

Definicja 5. Tabela współczynników i wyrazów wolnych

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

nazywa się *macierzą rozrzerzoną* układu.

Wektory wyrazów wolnych, niewiadomych i rozwiązań

Definicja 6. Columna $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ nazywa się *wektorem* wyrazów wolnych układu 1.

Definicja 7. Columna $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ nazywa się *wektorem* niewiadomych.

Definicja 8. Columna $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ nazywa się *wektorem* rozwiązań.

Uwaga o zapisie wektorów

Uwaga 9.

- Dla oszczędności miejsca wektory zapisywane są również jako wiersze:
  - $b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{pmatrix}$
  - $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{pmatrix}$
  - $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_2^0 & \dots & x_m^0 \end{pmatrix}$
- Żeby podkreślić, że to są wektory-kolumny, czasami używa się nawisów kwadratowych lub klamrowych oraz przecinków:
  - $b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{bmatrix} = \left\{ b_1, \quad b_2, \quad \dots, \quad b_m \right\}$
  - $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{bmatrix} = \left\{ x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_m \right\}$
  - $x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 & x_2^0 & \dots & x_m^0 \end{bmatrix} = \left\{ x_1^0 \quad x_2^0 \quad \dots \quad x_m^0 \right\}$

Klasyfikacja układów — ilość rozwiązań

Definicja 10. Układ 1 nazywa się

- *sprzecznym,* jeżeli on nie ma rozwiązań,
- *określonym,* jeżeli on ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- *nieokreślonym,* jeżeli on ma więcej niż jedno rozwiązanie.

Przykład 11.

- $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = -1. \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 = 2. \end{cases}$$

Klasyfikacja układów — kształt macierzy

Definicja 12. Układ 1 (oraz macierz układu) nazywa się

- *kwadratowym,* jeżeli $m = n$ (ilość równań zgadza się z ilością niewiadomych),
- *diagonalnym (przekątnym),* jeżeli w macierzy poza *główną przekątną* są same zera, $a_{ij} = 0$ dla $j \neq j$,
- *schodkowym (trójkątnym),* jeżeli w macierzy pierwsze niezerowe elementy kolejnych niezerowych wierszy, znajdują się w coraz dalszych kolumnach.

Przykład 13. Na tablicy

Układy równoważne

Definicja 14. Dwa układy są *równoważne*, jeżeli zgadzają się zbiory ich rozwiązań.

- każde da sprzeczne układy są równoważne
- dla niesprzecznych układów U_1 i U_2 koniecznie i wystarczy żeby każde rozwiązanie U_1 było rozwiązaniem U_2 i każde rozwiązanie U_2 było rozwiązaniem U_1

Przykład 15. Na tablicy

Przekształcenia elementarne

Definicja 16. Układ U_2 jest otrzymany z układu U_1 za pomocą *przekształcenia elementarnego,* jeśli

1. wszystkie równania układu U_2 oprócz równania i są niezmienne, a równanie i zostało pomnożono przez niezerową liczbę α,
2. wszystkie równania układu U_2 oprócz równań i i j są niezmienne, a równania i i j zostały zamienione miejscami,
3. wszystkie równania układu U_2 oprócz równania j są niezmienne, a do równania j zostało dodane równanie i, mnożone przez czynnik α.

Przekształcenie elementarne 1 na macierzy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} & b_i \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \ldots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \ldots & \alpha a_{in} & \alpha b_i \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

$$\alpha \neq 0.$$

Przekształcenie elementarne 2 na macierzy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Przekształcenie elementarne 3 na macierzy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} & b_i \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \ldots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} & b_j \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} & b_i \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \ldots \\ a_{j1}+\alpha a_{i1} & a_{j2}+\alpha a_{i2} & \ldots & a_{jn}+\alpha a_{in} & b_j+\alpha b_i \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Twierdzenia

Twierdzenie 17. *Przekształcenia elementarne są odwracalne*

Twierdzenie 18. *Jeżeli układ U_2 został otrzymany z układu U_1 za pomocą przekształceń elementarnych, to te dwa układy są równoważne*

Twierdzenie 19. *Każdy układ może zostać sprowadzony do postaci schodkowej za pomocą przekształceń elementarnych*

Twierdzenie 20 (Metoda eliminacji Gaussa)**.** *Każda macierz może zostać sprowadzona do postaci schodkowej za pomocą przekształceń elementarnych*

Twierdzenie 21. *Każdy układ (każda macierz) może zostać sprowadzona do postaci schodkowej tylko za pomocą przekształceń elementarnych 2 i 3.*

Układ w postaci schodkowej

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1, \\ \qquad \bar{a}_{2k}x_k + \cdots\cdots\cdots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2, \\ \qquad\qquad \bar{a}_{3l}x_l + \cdots\cdots + \bar{a}_{3n}x_n = \bar{b}_3, \\ \qquad\qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad \bar{a}_{rs}x_s + \cdots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \bar{b}_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \bar{b}_m, \end{cases} \tag{3}$$

Definicja 22. Zmienne $x_1, x_k, x_l, \ldots, x_s$, gdzie $\bar{a}_{11}\bar{a}_{2k}\bar{a}_{3l}\ldots\bar{a}_{rs} \neq 0$, nazywane sę *zmiennymi głównymi*, pozostałe zmienne są *wolne (swobodne)*.

Analiza układu schodkowego

Twierdzenie 23. *Układ 1 jest niesprzecznym wtedy i tylko wtedy, dgy równoważny jemu układ schodkowy 3 nie zawiera równań postaci* $0 = \bar{b}_t$, *gdzie* $\bar{b}_t \neq 0$. *Jeżeli warunek ten jest spełniony, to zmiennym wolnym można nadać dowolne wartości. Zmienne główne zostaną przez nie jednoznacznie określone z układu 3.*

Twierdzenie 24. *Niesprzeczny układ 1 jest określony wtedy i tylko wtedy, dgy w równoważnym jemu układzie schodkowym 3 spełniono jest* $r = n$.

Twierdzenie 25. *Niesprzeczny i nieokreślony układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.*

Wniosek 26. *Układ 1, w którym* $m = n$ *jest określony wtedy i tylko wtedy, dgy w równoważnym jemu układzie schodkowym 3* $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn} \neq 0$.

Wniosek 27. *Układ 1, w którym* $m = n$ *jest określony wtedy i tylko wtedy, dgy powiązany z nim układ jednorodny ma tylko zerowe rozwiązanie.*

Wniosek 28. *Niesprzeczny układ 1, w którym* $n > m$ *jest nieokreślonym.*

Przykład

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2; \end{cases}$$

Wyznacznik macierzy 2×2

Definicja 29.

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Definicja 30. Wyznacznik $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ nazywa się *wyznacznikiem* układu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

Wzory Cramera — układ 2×2

Twierdzenie 31. *Rozwiązanie układu*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

dane jest wazorem

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Wzory Cramera — układ jednorodny

Twierdzenie 32. *Rozwiązanie układu*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \end{cases}$$

dane jest wzrem

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad x_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Wyznacznik macierzy 3×3

Definicja 33.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Wzory Cramera — układ 3×3

Twierdzenie 34. *Rozwiązanie układu*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

dane jest wzorem

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Definicja

Definicja 35. *Przestrzenią wektorową (liniową) nad ciałem liczb rzeczywistych* $\mathbb{R}$ nazywa się zbiór $\mathcal{X}$, w którym określone są dwie operacje: dodawanie elementów zbioru $\mathcal{X}$ i mnożenie elementów zbioru $\mathcal{X}$ przez liczby rzeczywiste w taki sposób, że są spełnione własności:

- $\forall X, Y \in \mathcal{X} \quad X + Y = Y + X$,
- $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X} \quad (X + Y) + Z = X + (Y + Z)$,
- $\exists 0 \in \mathcal{X}$, takie że $\forall X \in \mathcal{X} X + 0 = 0 + X = X$,
- $\forall X \in \mathcal{X}, \exists (-X) \in \mathcal{X}$ takie że $X + (-X) = (-X) + X = 0$,
- $\forall X \in \mathcal{X}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha)(\beta X) = (\alpha\beta)X$,
- $\forall X \in \mathcal{X}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$,
- $\forall X, Y \in \mathcal{X}, \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$,
- $\forall X \in \mathcal{X}, \quad 1 \cdot X = X$.

Przykłady przestrzeni liniowych

- przestrzeń wektorów na płaszczyźnie, w przestrzeni trójwymiarowej
- $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\}$
- $(\mathbb{R}^n)^* = \{ \ (x_1, \ldots, x_n) \ \}$
- $\mathbb{W}_3$ — wielomiany stopnia 3: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$
- funkcje wymierne $\frac{P(x)}{Q(x)}$
- zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań

Elementarne własności

- $0 \cdot X = 0$
- $\alpha \cdot 0 = 0$
- $(-1) \cdot X = -X$
- $\alpha \cdot X = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ lub $X = 0$

Podprzestrzeń liniowa

Definicja 36. Niech $\mathcal{X}$ będzie przestrzenią liniową. Niepusty podzbiór $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$, który sam jest przestrzenią liniową, nazywa się *podprzestrzenią* $\mathcal{X}$.

Twierdzenie 37. *$\mathcal{V}$ jest podprzestrzenią $\mathcal{X}$ wtedy i tylko wtedy gdy*

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathcal{V} \Rightarrow \alpha X \in \mathcal{V}$
2. $\forall X, Y \in \mathcal{V} \Rightarrow X + Y \in \mathcal{V}$

Lemat 38. *Niech dane będą $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ — dwie podprzestrzenie liniowe $\mathcal{X}$ wtedy $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ też jest podprzestrzenią liniową $\mathcal{X}$.*

Uwaga 39. $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ nie koniecznie jest podprzestrzenią liniową $\mathcal{X}$.

Kombinacja liniowa

Definicja 40. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Wektor

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots \alpha_k X_k$$

nazywa się *kombinacją liniową* wektorów $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{X}$.

Twierdzenie 41. *Niech dany będzie podzbiór $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}$. Zbiór wszystkich kombinaci liniowych elementów $\mathcal{L}$ jest podprzestrzenią $\mathcal{X}$.*

Definicja 42. Zbiór wszystkich kombinacji liniowych elementów $\mathcal{L} \subset X$ nazywamy *otoczką liniową* $\mathcal{L}$. Oznaczenia: $\mathrm{span}(\mathcal{L})$, $\langle \mathcal{L} \rangle$.

Przykłady

- $$\mathcal{U}_m = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}, \mathcal{V}_m = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} | x_i \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$
    - $\mathcal{U}_m \cap \mathcal{V}_m = \{ 0 \}$
    - $\langle \mathcal{U}_m, \mathcal{V}_m \rangle = \mathbb{R}^n$
- $$\{ E_1 = (1, 0, \ldots, 0), E_2 = (0, 1, 0 \ldots, 0), \ldots, E_n = (0, \ldots, 0, 1) \}$$
    - $\langle E_1, \ldots, E_n \rangle = \mathbb{R}^{\ltimes}$

Liniowa niezależność

Definicja 43. Układ wektorów $\{X_1, \ldots, X_k\}$ w przestrzeni liniowej $\mathcal{X}$ nazwiemy układem *liniowo niezależnym*, jeżeli dla dowolnych współczynników $\alpha_1, \ldots \alpha_k \in \mathbb{R}$, nie równych zeru jednocześnie $\alpha_1 X_1 + \ldots \alpha_k X_k \neq 0$.

Definicja 44. Układ wektorów, który nie jest liniowo niezależnym, nazywa sie *liniowo zależnym*.

Liniowa niezależność, cd

Twierdzenie 45.

1. *Jeżeli układ* $\{X_1, \ldots, X_k\}$ *ma liniowo zależny podukład, to on też jest liniowo zależnym*
2. *Każdy podukład niezależnego liniowo układu* $\{X_1, \ldots, X_k\}$ *jest liniowo niezależnym*
3. *Jeżeli układ* $\{X_1, \ldots, X_k\}$ *jest liniowo zależnym, to przytnajmniej jeden z wektorów jest kombinacją liniową pozostałych*
4. *Jeżeli jeden z wekotorów* $\{X_1, \ldots, X_k\}$ *jest liniową kombinacją pozostałych, to układ* $\{X_1, \ldots, X_k\}$ *jest liniowo zależnym.*
5. *Jeżeli układ* $\{X_1, \ldots, X_k\}$ *jest liniowo niezależnym, a układ* $\{X_1, \ldots, X_k, X\}$ *jest liniowo zależnym, to* X *jest kombinacją liniową* $\{X_1, \ldots, X_k\}$*.*
6. *Jeżeli* $\{X_1, \ldots, X_k\}$ *jest linowo niezależnym oraz* X *nie jest kombinacją liniową tego układu, to układ wektorów* $\{X_1, \ldots, X_k, X\}$ *jest liniowo niezależnym*

Baza przestrzeni liniowej

Definicja 46. Niech $\mathcal{X}$ będzie przestrzenią liniową. Układ wektorów $\{X_1, \ldots, X_n\} \in \mathcal{X}$ przestrzeni X nazywa się *generującym*, jeżeli $\langle X_1, \ldots, X_n \rangle = \mathcal{X}$.

Definicja 47. Niech $\mathcal{X}$ będzie przestrzenią liniową. Układ wektorów $\{X_1, \ldots, X_n\} \in \mathcal{X}$ nazywa się *bazą* przestrzeni $\mathcal{X}$, jeżeli jest on niezależnym liniowo oraz $\langle X_1, \ldots, X_n \rangle = \mathcal{X}$.

Przykład 48.
- $\{E_1, \ldots, E_n\}$ jest *standardową* bazą w $\mathbb{R}^n$
- $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ jest bazą w przestrzeni wielomianów stopnia 4

Lemat 49. *Niech* $\{X_1, \ldots, X_n\}$ *będzie bazą przestrzeni* $\mathcal{X}$. *Wtedy każdy wektor* $X \in \mathcal{X}$ *może być jednoznacznie zapisdany jako kombinacja liniowa* $X = x_1 X_1 + \cdots + x_n X_n$.

Definicja 50. Liczby $(x_1, \ldots, x_n)$, określone w lemacie 49, nazymawy *współrzędnymy* wektora X w bazie$\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Wymiar przestrzeni liniowej

Lemat 51. *Niech $\mathcal{X}$ będzie przestrzenią liniową z bazą $\{X_1, \ldots, X_n\}$. Niech $\{Y_1, \ldots, Y_s\}$ będzie układem niezależnym liniowo. Wtedy $s \leqslant n$.*

Wniosek 52. *Niech $\mathcal{X}$ będzie przestrzenią liniową z bazą $\{X_1, \ldots, X_n\}$. Wtedy każda inna baza ma tyle samo elementów.*

Definicja 53. Przestrzeń, która ma bazę skończoną nazywamy *skończenie wymiarową*, a ilość elementów bazy — *wymiarem* przestrzeni, $\dim \mathcal{X}$

- $\dim\{0\} = 0$

Rząd układu wektorów

Definicja 54. *Rzędem* układu wektorów $\{X_1, \ldots, X_n\}$ nazywamy wymiar jego otoczki liniowej.

$$\operatorname{rank}(X_1, \ldots, X_n) = \dim\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$$