

Matematyka
Funkcje wielu zmiennych

Aleksander Denisiuk

denisjuk@euh-e.edu.pl

Elbląska Uczelnia Humanistyczno-Ekonomiczna

ul. Lotnicza 2

82-300 Elbląg

Funkcje wielu zmiennych

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

<http://denisjuk.euh-e.edu.pl/>

Przestrzeń Euklidesowa \mathbb{R}^n

Definicja 1. Niech dana będzie przestrzeń $n \in \mathbb{R}$. *Odległość* dwóch punktów $x = (x_1, \dots, x_n)$ oraz $y = (y_1, \dots, y_n)$ określamy jako

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Twierdzenie 2. • $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y$

- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Norma wektora

Definicja 3. Norma wektora $X = (X_1, \dots, X_n)$ określona jest jako

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |X_i|^2}$$

Twierdzenie 4. • $\|X\| \geq 0, \|X\| = 0 \iff X = 0$

- $\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$
- $\|X - Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$
- $d(x, y) = \|\vec{xy}\|$

Zbiory w \mathbb{R}^n

- *Kula otwarta*: $B(a, r) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) < r \}$
- *Kula domknięta*: $B(a, r) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) \leq r \}$
- *Otoczenie punktu a* : $U(a) = B(a, r)$
- *Sąsiedztwo punktu a* :
 $U(a) = B(a, r) \setminus \{ a \} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < d(a, x) < r \}$
- Punkt $a \in A$ nazywa się *wewnętrznym*, jeżeli istnieje otoczenie $U(a) \subset A$
- Zbiór nazywa się *otwartym*, jeżeli każdy jego punkt jest wewnętrznym.
 - Zbiór pusty jest otwartym
- Punkt a nazywa się *punktem skupienia* zbioru A , jeżeli każde sąsiedztwo a zawiera co najmniej jeden punkt zbioru A

Zbiory w \mathbb{R}^n , cd

- Zbiór nazywa się *domkniętym*, jeżeli zawiera wszystkie swoje punkty skupienia
 - Zbiór pusty jest domkniętym
 - Dopełnienie zbioru otwartego jest zbiorem domkniętym
 - Dopełnienie zbioru domkniętego jest zbiorem otwartym
- *Domknięciem* \bar{A} zbioru A nazywa się suma mnogościowa zbioru A i wszystkich jego punktów skupienia.
 - \bar{A} jest zbiorem domkniętym
- *Brzegiem* zbioru A (∂A) nazywa się wszystkie punkty przestrzeni, w których każdym otoczeniu znajdują się zarówno punkty A jak i punkty jego dopełnienia A'
 - Punkty brzegowe zbioru otwartego do niego nie należą
 - Punkty brzegowe zbioru domkniętego do niego należą
 - $A \cup \partial A$ jest zbiorem domkniętym

Zbiory w \mathbb{R}^n , cdd

- Dwa zbiory nazywamy *rozłącznymi*, jeżeli nie mają one wspólnych elementów
- *Obszarem* nazywamy zbiór otwarty, którego nie można przedstawić w postaci sumy mnogościowej rozłącznych zbiorów otwartych
- *Obszarem domkniętym* nazywamy sumę mnogościową obszaru i jego brzegu
- Zbiór nazywamy *ograniczonym*, jeżeli zawiera się on wewnątrz pewnej kuli.

Zbieżność w \mathbb{R}^n

- Ciąg punktów $a_n \in \mathbb{R}^n$ jest zbieżny do $a \in \mathbb{R}^n$, jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, a_n) = 0$$

- Oznaczenie: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff$ dla każdej współrzędnej $a_i^{(n)} \rightarrow a_i$

Granica funkcji w \mathbb{R}^n

Funkcje ciągłe w \mathbb{R}^n

Funkcje różniczkowalne w \mathbb{R}^n

Pochodne cząstkowe