

Matematyka
Równania różniczkowe

Aleksander Denisiuk

denisjuk@euh-e.edu.pl

Elbląska Uczelnia Humanistyczno-Ekonomiczna

ul. Lotnicza 2

82-300 Elbląg

Równania różniczkowe

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem
<http://denisjuk.euh-e.edu.pl/>

Wiadomości wstępne

- Definicja 1.**
1. *Równaniem różniczkowym zwyczajnym* nazywamy równanie $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, w którym występuje niewiadoma funkcja $y = y(x)$ oraz jej pochodne do rzędu n .
 2. Liczba n nazywa się *rzędem* równania.
 3. *Rozwiązaniem* albo *całką* równania różniczkowego nazywa się funkcja $y(x)$ zmiennej niezależnej x , która ma n pochodnych i po podstawieniu do równania spełnia to równanie tożsamościowo.
 4. *Całką ogólną* równania różniczkowego rzędu n nazywa się takie jego rozwiązanie, które zależy od n niezależnych dowolnych stałych.
 5. Funkcje, otrzymane z całki ogólnej dla różnych konkretnych wartości liczbowych stałych dowolnych noszą nazwę *całek szczególnych* całki szczególne równania różniczkowego równania.

Przykłady równań różniczkowych

- Przykład 2.**
1. $y' = x + 1$ jest równaniem pierwszego stopnia,
 $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ jest rozwiązaniem (całką szczególną) tego równania,
 $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C$ jest całką ogólną.
 2. $y'' = y + 1$ jest równaniem drugiego stopnia, $y(x) = -1$ jest rozwiązaniem (całką szczególną) tego równania,
 $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} - 1$ jest całką ogólną.

Zagadnienie Cauchy'ego

Definicja 3. *Zagadnieniem Cauchy'ego* dla równania różniczkowego n -tego rzędu jest poszukiwanie całki tego równania, spełniającej n warunków początkowych o postaci $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, gdzie y_0, \dots, y_{n-1} — dane z góry wartości funkcji $y(x)$ i jej pochodnych w ustalonym punkcie x_0 .

- Zagadnienie Cauchy'ego dla bardzo szerokiej klasy równań różniczkowych ma jednoznaczne rozwiązanie.

Przykład Zagadnienia Cauchy'ego

Przykład 4.

$$\begin{cases} y'' = y + 1, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Rozwiązanie. Rozwiązanie polega na ustaleniu stałych C_1 i C_2 w całce ogólnej tego równania (v. przykład 2, punkt 2):

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 1 = 0, \\ C_1 - C_2 = 1. \end{cases}$$

Z ostatniego układu wynika, że $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Więc rozwiązaniem zagadnienia 1 będzie $y(x) = e^x - 1$. □

Równania o zmiennych rozdzielonych

Definicja 5. Równanie różniczkowe pierwszego rzędu $y' = \psi(x)\varphi(y)$, zapisywane także w postaci $M(x)N(y) dx + P(x)Q(y) dy = 0$ nazywa się *równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych*.

- Żeby rozwiązać równanie o zmiennych rozdzielonych, doprowadzamy go do postaci $f(x)dx = h(y)dy$ i całkujemy obie strony.

Uwaga 6. Przy dzieleniu równania przez wyrażenie, które zależy od x i/lub y można zgubić rozwiązania, na których to wyrażenie jest równe zero.

Przykład równania o zmiennych rozdzielonych

Przykład 7. $x^2 y^2 y' + 1 = y$.

Rozwiązanie. 1. Rozdzielamy zmienne:

$$x^2 y^2 \frac{dy}{dx} = y - 1 \iff \frac{y^2}{y-1} dy = \frac{dx}{x^2}.$$

2. Całkujemy obie strony:

$$\int \frac{y^2}{y-1} dy = \int \frac{dx}{x^2} \iff \frac{y^2}{2} + y + \ln |y - 1| = -\frac{1}{x} + C.$$

3. Przy rozdzielaniu zmiennych dzieliliśmy przez $(y - 1)x^2$, więc mogły się zgubić rozwiązania $y = 1$ oraz $x = 0$. Oczywiście, pierwsze z nich jest rozwiązaniem, drugie nie.

□

Proces powielania

Przykład 8. $y' = \lambda y$.

Równania jednorodne

Definicja 9. Równanie postaci $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ nazywa się równaniem *jednorodnym*.

Uwaga 10. Równanie jednorodne może być zapisane również w postaci $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$, gdzie funkcje $M(x, y)$ i $N(x, y)$ są jednorodne tego samego stopnia^a.

- Żeby rozwiązać jednorodne równanie, wykonuje się podstawienie $u(x) = \frac{y}{x}$, po czym równanie zostanie równaniem o zmiennych rozdzielonych.

^aFunkcja $F(x, y)$ nazywa się *jednorodną* stopnia α , jeżeli $\forall t \in \mathbb{R}$ spełnia się tożsamość $F(tx, ty) = t^\alpha F(x, y)$

Przykład równania jednorodnego

Przykład 11. $x dy = (x + y) dx$.

Rozwiązanie. 1. Równanie jest jednorodnym.

2. Zróbmy podstawienie $y = ux$, więc $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$.

3. W taki sposób, $x dy = (x + y) dx \iff x du = dx \Rightarrow u = \ln |x| + C \Rightarrow y = x(\ln |x| + C)$.

4. Poza tym jest rozwiązanie $x = 0$, które zostało zagubiono przy dzieleniu przez x .

□

Równania różniczkowe liniowe rzędu pierwszego

Definicja 12. Równanie $y' + a(x)y + b(x) = 0$ nazywa się *równaniem liniowym rzędu pierwszego*.

- Żeby rozwiązać równanie liniowe rzędu pierwszego, należy najpierw rozwiązać równanie $y' + a(x)y = 0$, w otrzymanej całce ogólnej zamienić dowolną stałą C przez niewiadomą funkcję $C(x)$, po tym, z równania istotnego, znaleźć $C(x)$.

Przykład równania liniowego rzędu pierwszego

Przykład 13. $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x$.

Rozwiązanie. 1.

$$y' - y \operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \operatorname{ctg} x \, dx \Rightarrow \ln |y| = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln |\sin x| + \ln C \Rightarrow y = C \sin x.$$

2. $y = C(x) \sin x \Rightarrow y' = C'(x) \sin x + C(x) \cos x$, $y \operatorname{ctg} x = C(x) \cos x \Rightarrow C'(x) \sin x = \sin x \Rightarrow C(x) = \int dx = x + C$.

3. $y(x) = (x + C) \sin x$.

□

Równanie liniowe o współczynnikach stałych

- $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$

- Równanie jednorodne:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

- Równanie charakterystyczne:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

- Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego:

$y_0(x) = C_1e^{\lambda_1x} + C_2e^{\lambda_2x} + \dots + C_ne^{\lambda_nx}$, gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — są *różne* pierwiastki równania charakterystycznego

- $e^{(u+iv)x} = e^{ux}(\cos vx + i \sin vx)$

- w przypadku pierwiastków zespolonych zamiast

$$C_1e^{(u+iv)x} + C_2e^{(u-iv)x} \text{ można przyjąć}$$

$$C_1e^{ux} \cos vx + C_2e^{ux} \sin vx$$

- Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego:

$y(x) = y_0(x) + y_1(x)$, gdzie $y_1(x)$ — rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego

Przykład: drgania

- $y'' = -k^2y$
- drgania wymuszone i rezonans: $y'' = -k^2y + \sin(\alpha x)$