Matematyka

Funkcje Elementarne

Aleksander Denisiuk

denisjuk@euh-e.edu.pl

Elbląska Uczelnia Humanistyczno-Ekonomiczna

ul. Lotnicza 2

82-300 Elbląg

Funkcje Elementarne

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

`http://denisjuk.euh-e.edu.pl/`

Potęga wymierna

Twierdzenie 1. *Niech $n \in \mathbb{N}$. Wtedy funkcja x^n przy $x \in [0, +\infty)$ rośnie i jest ciągłą.*

Dowód. $x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \cdots + x_1^{n-1})$. $\square$

Wniosek 2. *Istnieje funkcja, odwrotna do $x^n : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$,* pierwiastek stopnia n: $y \mapsto \sqrt[n]{y}$.

Definicja 3. Niech α będzie liczbą wymierną. Wtedy dla $a > 0$ określone jest a^α w sposób następujący:

1. Dla $n > 0$: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$,
2. dla $m, n > 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$,
3. $a^0 = 1$,
4. dla $\alpha < 0$: $a^\alpha = \frac{1}{a^{-\alpha}}$.

Własności wymiernej potęgi

Twierdzenie 4. *1.* $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}, \quad a^\alpha \cdot b^\alpha = (ab)^\alpha, \quad a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}.$

2. Dla $a > 1$ oraz $\alpha > 0$ $\quad a^\alpha > 1$.

3. Dla $a > 1$ funkcja a^x rośnie na zbiorze liczb wymiernych.

Dowód. 2. Załóżymy, że $a^{\frac{m}{n}} < 1$.

3. $a^{\frac{m_1}{n_1}} < a^{\frac{m_2}{n_2}}$ dla $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$.

□

Funkcja wykładnicza

Twierdzenie 5. *Niech dane będą $x, a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Istnieje jedyna liczba rzeczywista y, taka, że dla dowolnych liczb $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, $\alpha < x < \beta \Rightarrow a^\alpha \leqslant y \leqslant a^\beta$.*

Definicja 6. Definiujemy dla $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$, potęgę a^x jako jedyną liczbę, określoną w twierdzeniu 5. Dla $0 < a < 1$ definiujemy $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$.

Własności funkcji wykładniczej

Twierdzenie 7. *1.* $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}, \quad a^\alpha \cdot b^\alpha = (ab)^\alpha, \quad a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}.$

2. Funkcja a^x dla $a > 1$ rośnie, dla $0 < a < 1$ maleje na całą prostą.

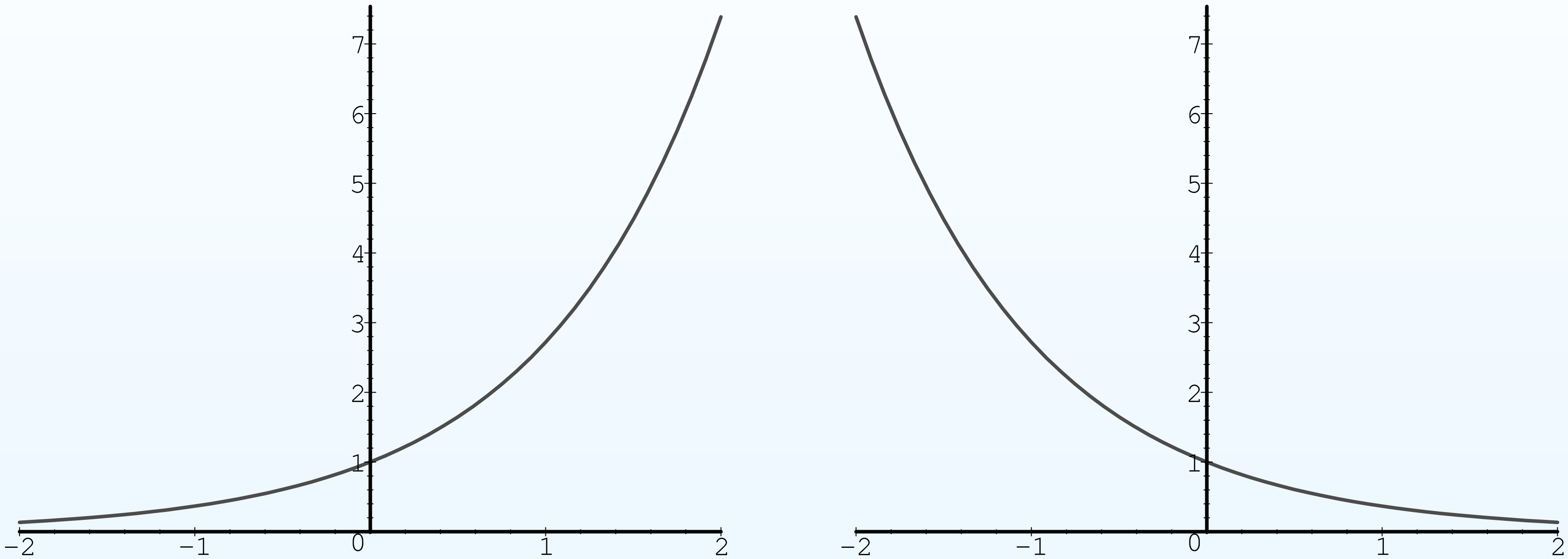
3. Funkcja a^x jest ciągłą $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. Funkcja a^x jest dodatnią $\forall x \in \mathbb{R}$.

5. Dla $a > 1$ $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, dla $0 < a < 1$ $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$.

6. Zbiorem wartości funkcji a^x ($a \neq 1$) jest półprosta $(0, +\infty)$.

Wykres funkcji $y = a^x$



Rysunek 1: Wykres funkcji $y = a^x$ dla $a > 1$ (po lewej) oraz dla $0 < a < 1$ (po prawej)

Logarytm

Definicja 8. Funkcję $\log_a x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$ definiujemy jako odwrotną do $a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$.

Własności logarytmu

Twierdzenie 9. *1.* $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$,

$\log_a(\frac{x_1}{x_2}) = \log_a x_1 - \log_a x_2$, $\quad \log_a(x^\alpha) = \alpha \cdot \log_a x$,

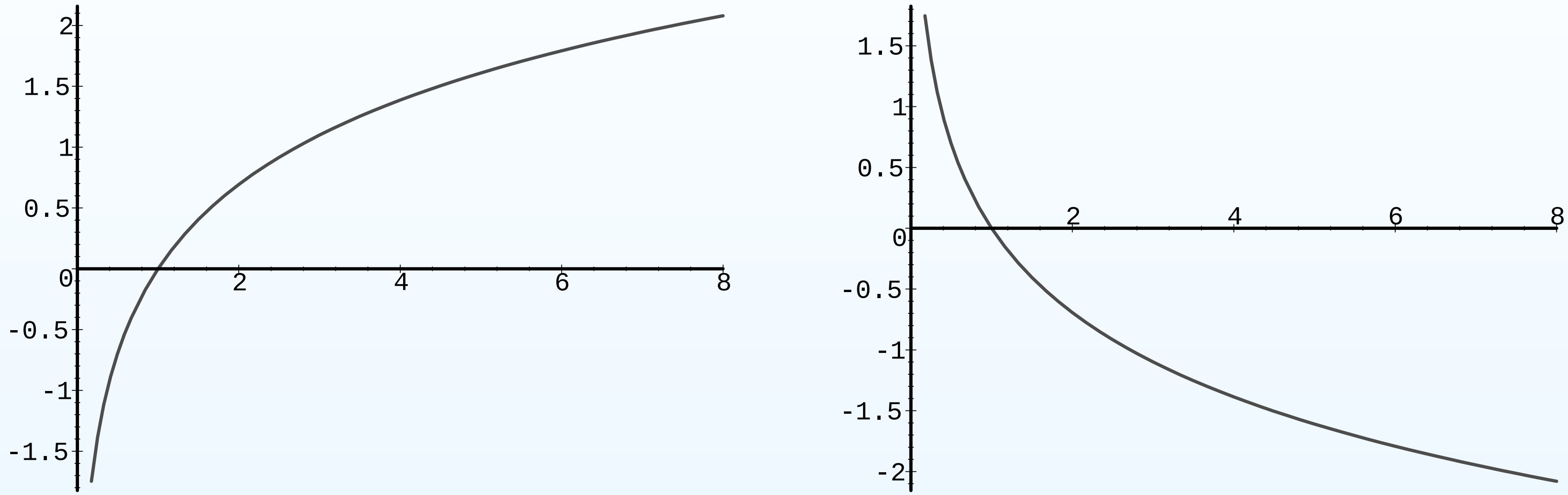
$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

2. Funkcja $y = \log_a x$ jest ciągłą i rosnącą na półprostej $(0, +\infty)$ dla $a > 1$ oraz malejącą dla $0 < a < 1$.

3. $\lim\limits_{x \to 0+} \log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ *przy* $a > 1$ *oraz*

$\lim\limits_{x \to 0+} \log_a x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$ *przy* $0 < a < 1$.

Wykres funkcji $y = \log_a x$



Rysunek 2: Wykres funkcji $y = \log_a x$ dla $a > 1$ (po lewej) oraz dla $0 < a < 1$ (po prawej)

Uwaga 10*.* Logarytm przy podstawie e nazywa się *naturalnym* i oznacza się $\ln x$.

Funkcja potęgowa

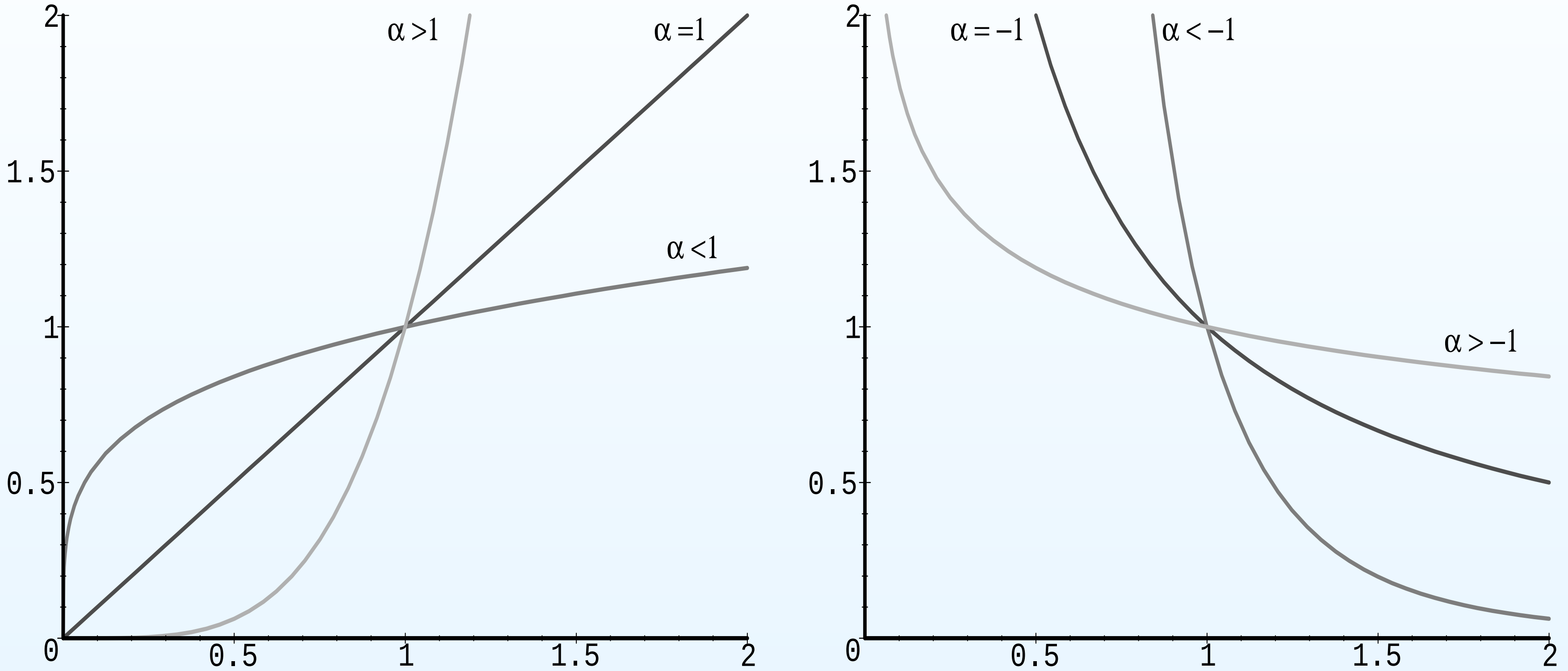
Definicja 11. Dla $\alpha \in \mathbb{R}$, określamy funkcję $x^\alpha : (0, +\infty) \to (0, \infty)$ w sposób następujący: $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

Własności funkcji potęgowej

Twierdzenie 12.

1. *Funkcja x^α jest funkcją ciągłą na $(0, +\infty)$.*
2. *Funkcja x^α jest funkcją rosnącą przy $\alpha > 0$ i malejącą przy $\alpha < 0$ na przedziale $(0, +\infty)$.*
3. $\lim\limits_{x \to 0+} x^\alpha = 0$ *przy* $\alpha > 0$ *oraz* $\lim\limits_{x \to 0+} x^\alpha = +\infty$ *przy* $\alpha < 0$.
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$ *przy* $\alpha > 0$ *oraz* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$ *przy* $\alpha < 0$.

Wykres funkcji $y = x^\alpha$



Rysunek 3: Wykres funkcji $y = x^\alpha$ dla $\alpha > 0$ (po lewej) oraz dla $\alpha < 0$ (po prawej)

Podstawowe własności funkcji trygonometrycznych

Twierdzenie 13. *1.* $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$,

2. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,

3. $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$,

4. $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$,

5. $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$,

6. *Dla* $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\quad 0 < \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$.

Własności funkcji trygonometrycznych

Wniosek 14.

1. $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$,
2. $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$,
3. $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$,
4. $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$,
5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,
6. $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$,
7. $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$,
8. $\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$,
9. $|\sin x| \leqslant |x|$.

Funkcje okresowe

Definicja 15. Funkcja $f(x)$ nazywa się *okresową,* jeżeli istnieje minimalna liczba $T \in \mathbb{R}$, takia, że $\forall x$ zachodzi $f(x+T) = f(T)$. Liczba T przy tym nazywa się *okresem funkcji* $f(x)$.

Uwaga 16. Własność 8 oznacza, że funkcje $\sin x$ i $\cos x$ mają okres 2π. Można udowodnić, że 2π jest najmniejszym z okresów.

Uwaga 17. Stała funkcja nie jest okresową.

Własności funkcji $\sin x$ oraz $\cos x$. Cd.

Twierdzenie 18. *Funkcje $\sin x$ oraz $\cos x$ są ciągłe na całej prostej $\mathbb{R}$.*

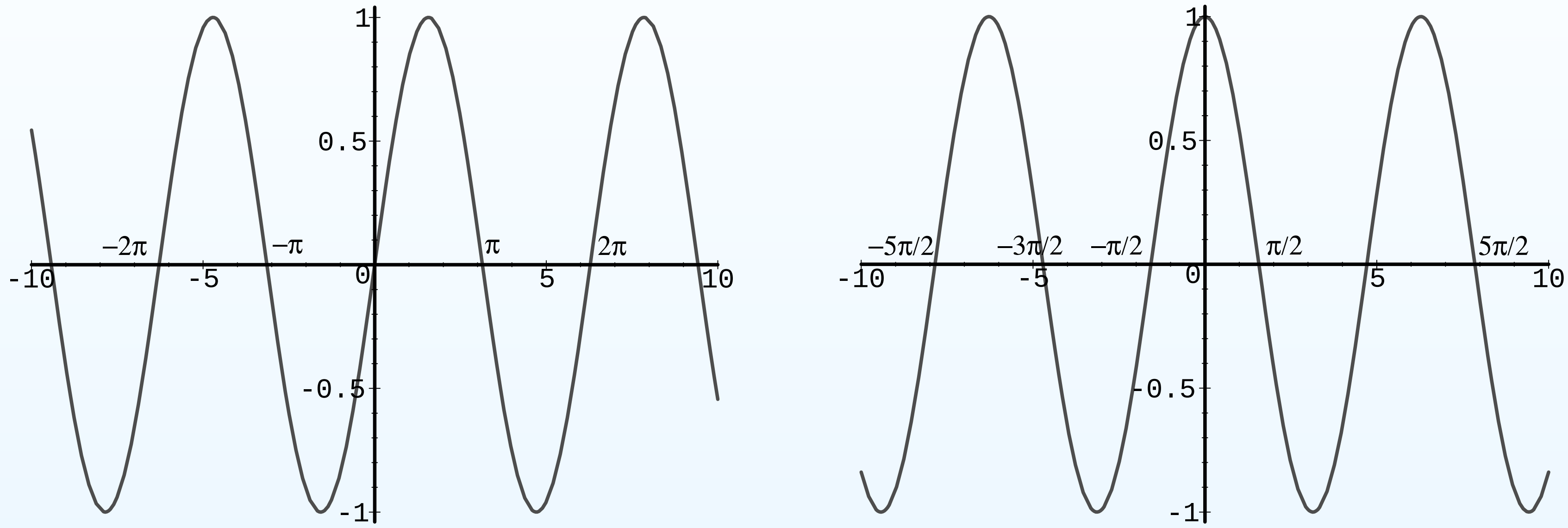
Dowód.

- $\sin x$ jest ciągłą w zerze.
- $\sin x - \sin x_n = 2\cos\frac{x+x_n}{2}\sin\frac{x_n-x}{2}$ jest ciągiem nieskończone małym dla ciągu $x_n \to x$.
- $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.

$\square$

Twierdzenie 19. *Funkcja $\sin x$ rośnie na każdym z przedziałów $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ i maleje na każdym z przedziałów $[(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}]$, zaś funkcja $\cos x$ rośnie na każdym z przedziałów $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ i maleje na każdym z przedziałów $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$. Wszędzie k jest liczbą całkowitą, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.*

Wykresy funkcji $\sin x$ oraz $\cos x$



Rysunek 4: Wykres funkcji $y = \sin x$ (po lewej) oraz $y = \cos x$ (po prawej)

Funkcje $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$

Definicja 20. 1. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

2. $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Uwaga 21. W literaturze anglojęzycznej używa się oznaczeń $\tan x$ oraz $\cot x$.

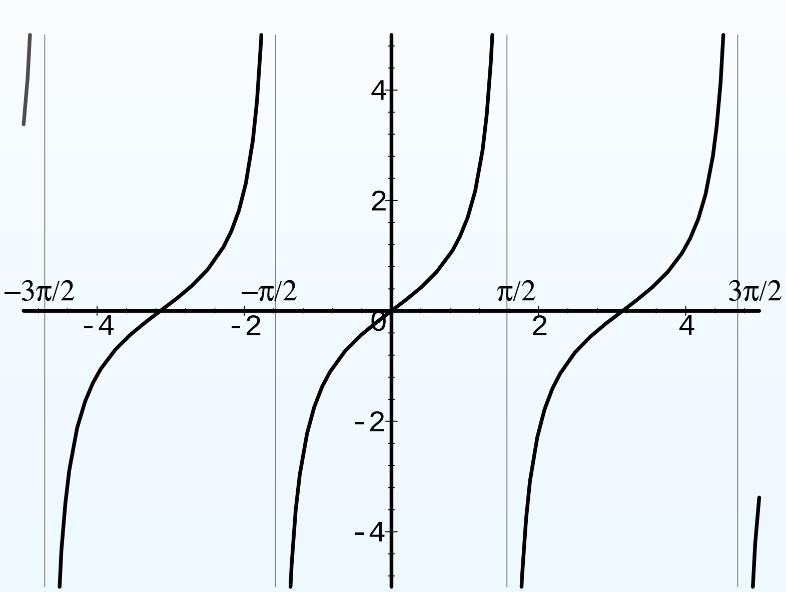
Własności funkcji $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$

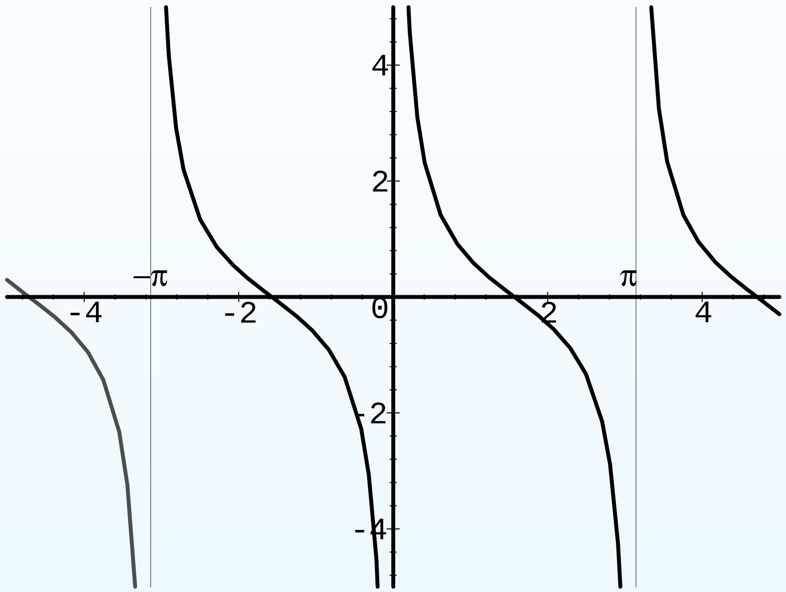
Twierdzenie 22. *1. Funkcja $\operatorname{tg} x$ jest ciągłą przy $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, zaś funkcja $\operatorname{ctg} x$ jest ciągłą przy $x \neq k\pi$.*

2. Funkcje $\operatorname{tg} x$ oraz $\operatorname{ctg} x$ mają okres π.

3. Funkcja $\operatorname{tg} x$ rośnie na każdym z przedziałów $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, zaś funkcja $\operatorname{ctg} x$ maleje na każdym z przedziałów $(k\pi, \pi + k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Wykresy funkcji $\operatorname{tg} x$ oraz $\operatorname{ctg} x$





Rysunek 5: Wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ (po lewej) oraz $y = \operatorname{ctg} x$ (po prawej)

Funkcje kołowe (odwrotne trygonometryczne funkcje)

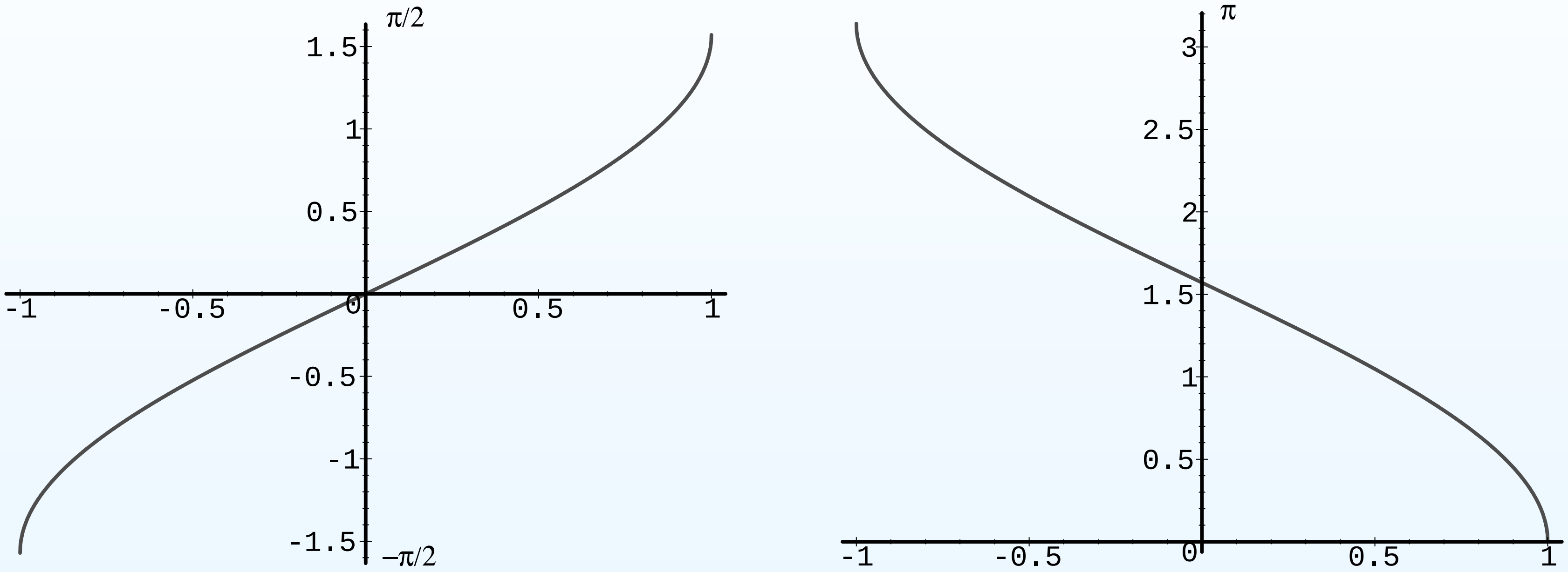
Definicja 23.

- $\arcsin x : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ jest funkcją odwrotną do $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$.
- $\arccos x : [-1, 1] \to [0, \pi]$ jest funkcją odwrotną do $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$.
- $\operatorname{arctg} x : (-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ jest funkcją odwrotną do $\operatorname{tg} x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, +\infty)$.
- $\operatorname{arcctg} x : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$ jest funkcją odwrotną do $\operatorname{ctg} x : (0, \pi) \to (-\infty, +\infty)$.

Twierdzenie 24.

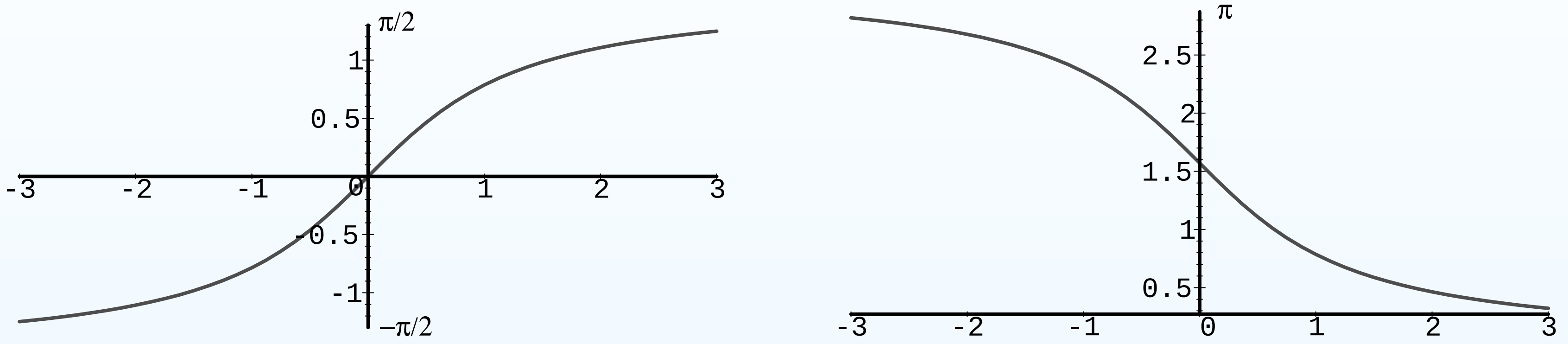
1. *Wszystkie te funkcje są ciągłe,*
2. *funkcje* $\arcsin x$ *i* $\operatorname{arctg} x$ *są rosnące,*
3. $\arccos x$ *oraz* $\operatorname{arcctg} x$ *są malejące.*

Wykresy funkcji $\arcsin x$ oraz $\arccos x$



Rysunek 6: Wykres funkcji $y = \arcsin x$ (po lewej) oraz $y = \arccos x$ (po prawej)

Wykresy funkcji $\operatorname{arctg} x$ oraz $\operatorname{arcctg} x$



Rysunek 7: Wykres funkcji $y = \operatorname{arctg} x$ (po lewej) oraz $y = \operatorname{arcctg} x$ (po prawej)

Funkcje hiperboliczne

Definicja 25.

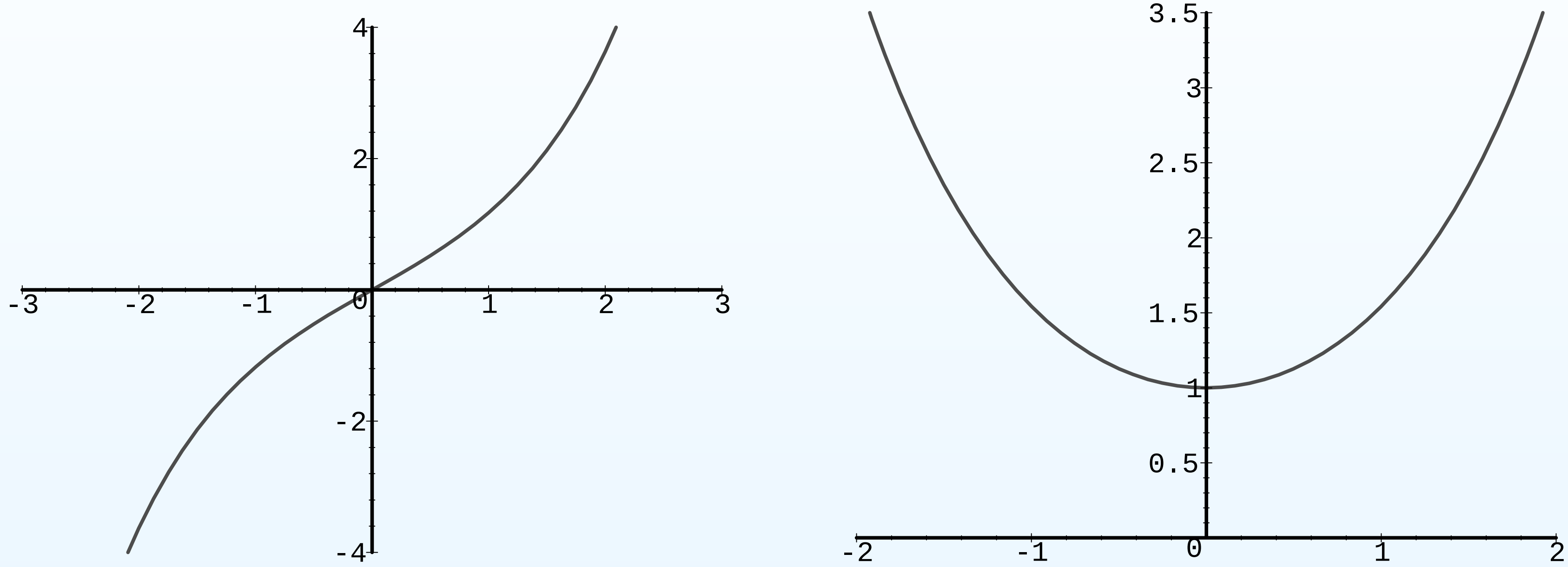
1. Funkcja $\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ nazywa się *sinusem hiperbolicznym*
2. Funkcja $\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ nazywa się *cosinusem hiperbolicznym*
3. Funkcja $\mathrm{tgh} = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ nazywa się *tangensem hiperbolicznym*
4. Funkcja $\mathrm{ctgh} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ nazywa się *cotangensem hiperbolicznym*

Twierdzenie 26. *Funkcje hiperboliczne są ciągłe we wszystkich punktach prostej $\mathbb{R}$ (cotangens hiperboliczny oprócz punktu $x = 0$).*

Twierdzenie 27.

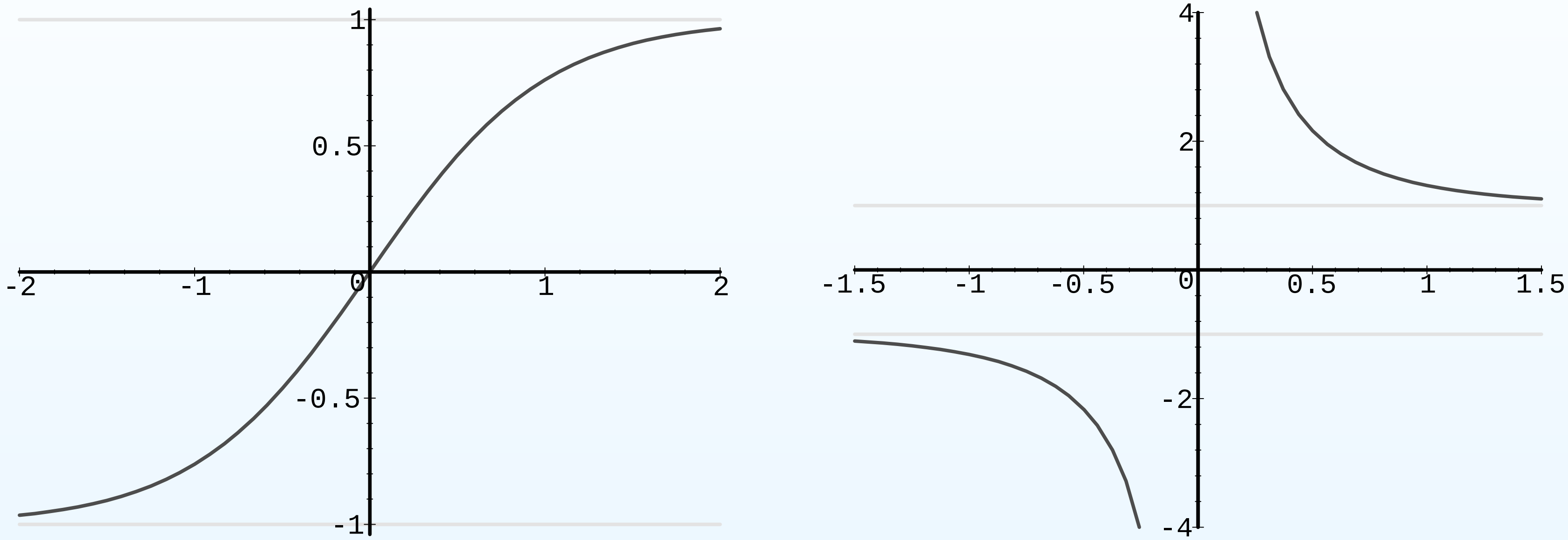
$$\sinh(x + y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y,$$
$$\cosh(x + y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y.$$

Wykresy funkcji $\sinh x$ oraz $\cosh x$



Rysunek 8: Wykres funkcji $y = \sinh x$ (po lewej) oraz $y = \cosh x$ (po prawej)

Wykresy funkcji $\operatorname{tgh} x$ oraz $\operatorname{ctgh} x$



Rysunek 9: Wykres funkcji $y = \operatorname{tgh} x$ (po lewej) oraz $y = \operatorname{ctgh} x$ (po prawej)

Dwie granice

Twierdzenie 28. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Twierdzenie 29. $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e.$