Matematyka

Zastosowania geometryczne całek

Aleksander Denisiuk

denisjuk@euh-e.edu.pl

Elbląska Uczelnia Humanistyczno-Ekonomiczna

ul. Lotnicza 2

82-300 Elbląg

Zastosowania geometryczne całek

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

`http://denisjuk.euh-e.edu.pl/`

Równania parametryczne krzywej

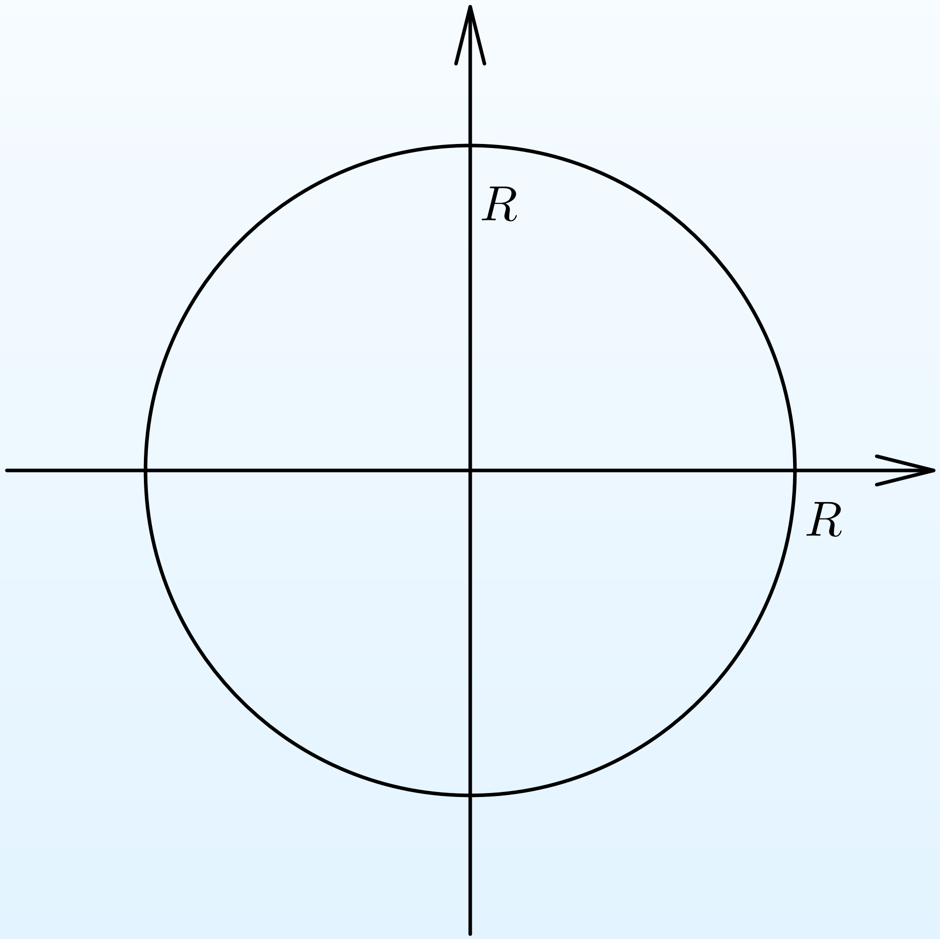
Definicja 1. Niech dane będą dwie ciągłe w przedziale $[t_0, t_1]$ funkcje,

$$x = f(t) \text{ oraz } y = g(t). \tag{1}$$

Mówimy wówczas, że funkcje te określają *krzywą parametryczną* na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Zmienna t nazywa się *parametrem*. O krzywej tej mówimy, że równania 1 są *równaniami parametrycznymi* tej krzywej.

Przykłady krzywych parametrycznych: okrąg

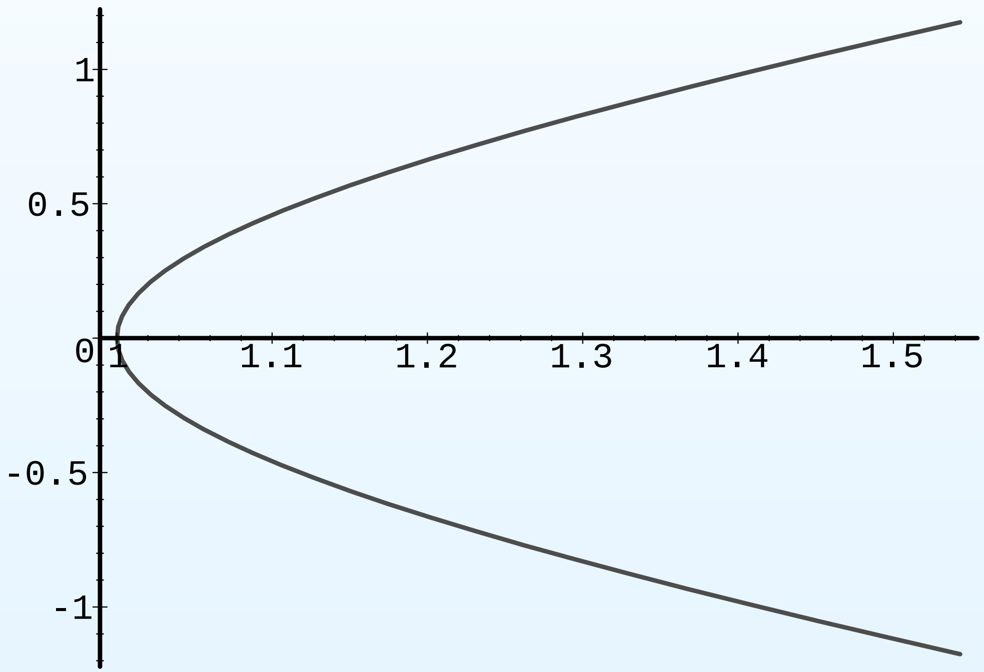
Przykład 2. $x = R\cos t, y = R\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$ określa okrąg $x^2 + y^2 = R^2$ o promieniu R i środku w punkcie $(0, 0)$:



Przykłady krzywych parametrycznych: hyperbola

Przykład 3.

$x = R\cosh t, y = R\sinh t, \quad t \in [-1, 1]$ określa łuk hyperboli $x^2 - y^2 = R^2$:



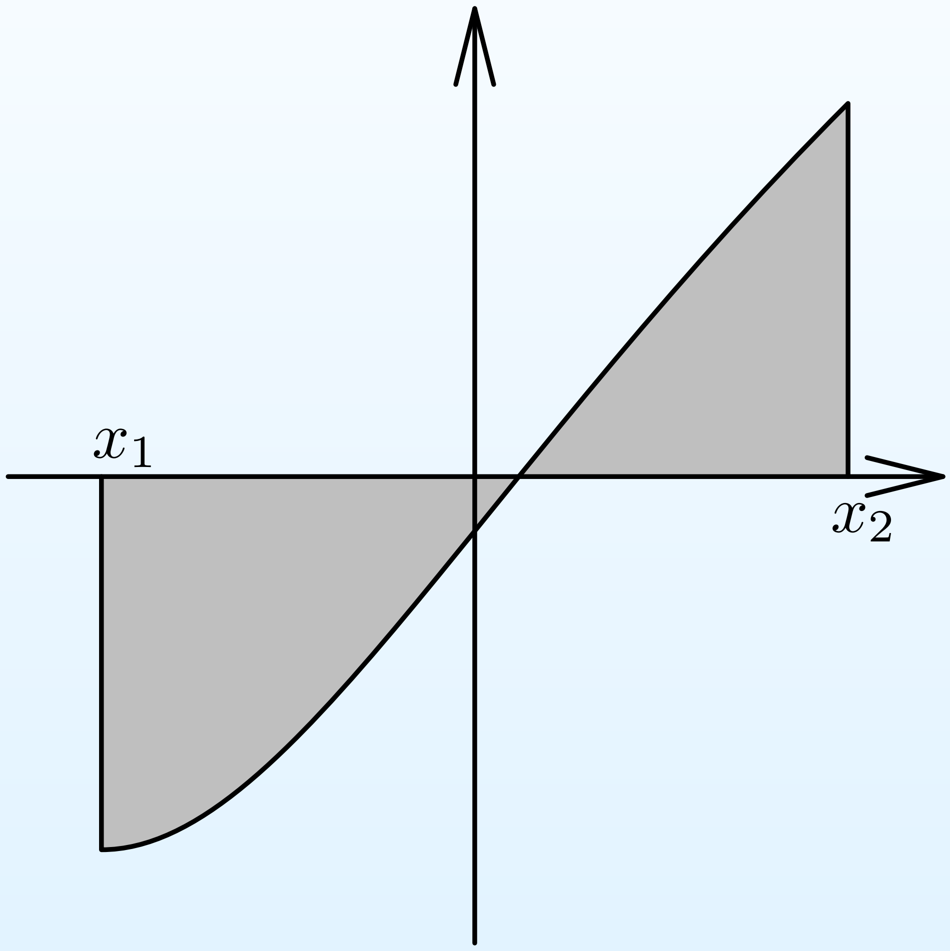
Pole obszaru, ograniczonego krzywą parametryczną

Twierdzenie 4. *Niech krzywa będzie określona równaniami parametrycznymi* $x = g(t)$, $y = h(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, *a przy tym funkcja* $g(t)$ *jest rosnąca i ma w tym przedziale pochodną ciągłą, to pole obszaru, ograniczonego łukiem danej krzywej, odcinkiem osi* Ox *oraz dwoma prostymi* $x = x_2$, $x = x_2$, *gdzie* $x_1 = g(t_1)$, $x_2 = g(t_2)$ *(rysunek 1), wyraża się wzorem*

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |y| \, dx = \int_{t_1}^{t_2} |h(t)| g'(t) \, dt.$$

Obszar, ograniczony krzywą parametryczną

Rysunek 1:



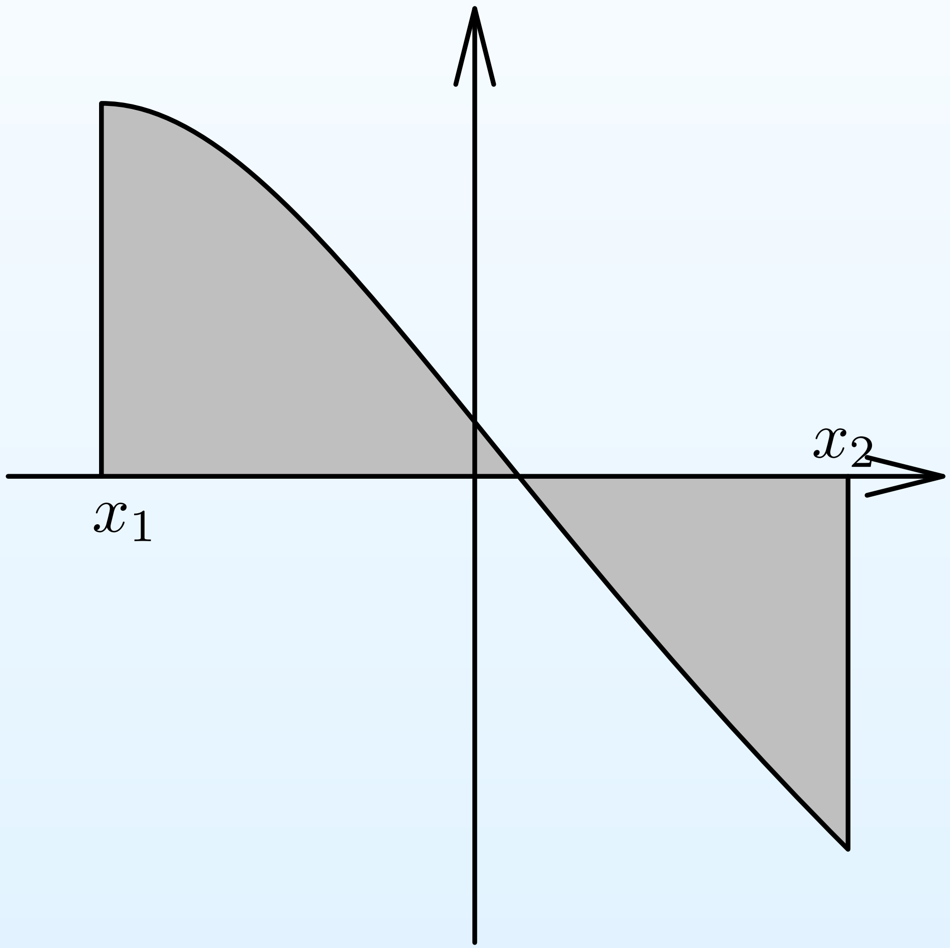
Pole obszaru, ograniczonego krzywą parametryczną

Twierdzenie 5. *Jeżeli dana krzywa jest określona równaniami parametrycznymi w postaci* $x = g(t)$, $y = h(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, *a przy tym funkcja* $g(t)$ *jest malejąca i ma w tym przedziale pochodną ciągłą, to pole obszaru, ograniczonego łukiem danej krzywej, odcinkiem osi* Ox *oraz dwoma prostymi* $x = x_2$, $x = x_2$, *gdzie* $x_1 = g(t_1)$, $x_2 = g(t_2)$ *(rysunek řefdrugi), wyraża się wzorem*

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |y|\, dx = -\int_{t_1}^{t_2} |h(t)| g'(t)\, dt.$$

Obszar, ograniczony krzywą parametryczną — II

Rysunek 2:



Przykład

Przykład 6. Znaleźć pole figury, zawartej między krzywymi $y = x^\alpha$ i $x = y^\alpha$, rysunek 3.

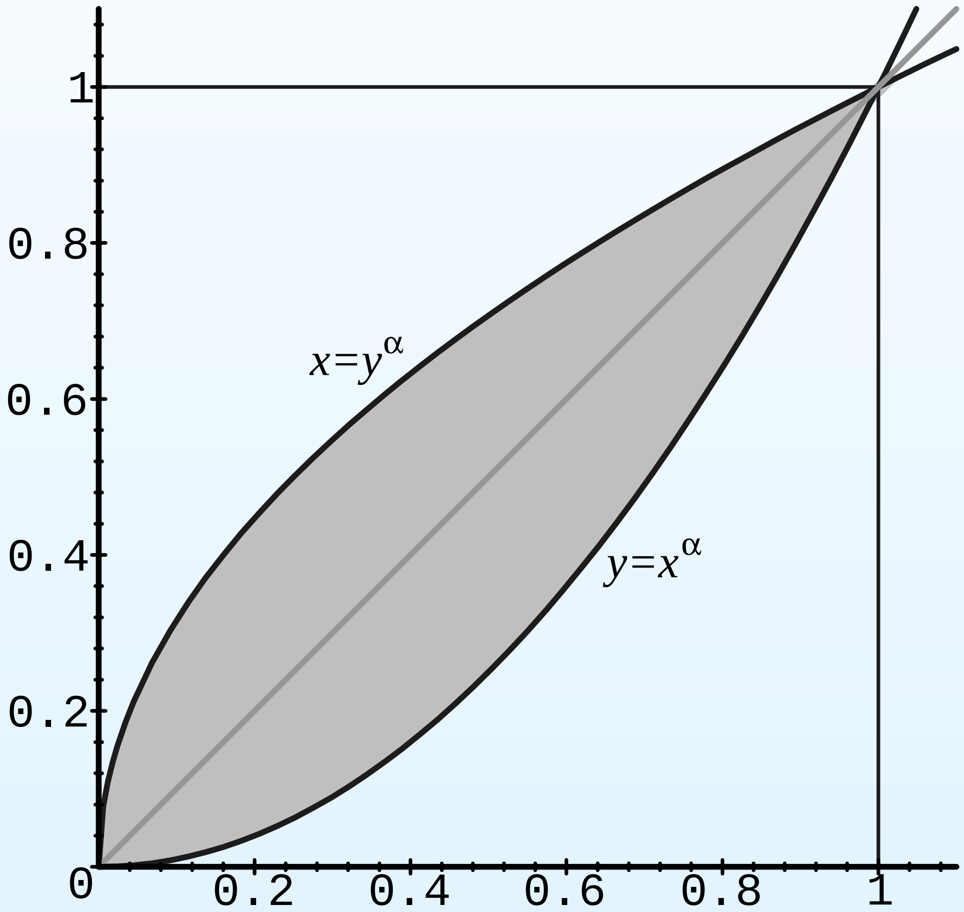
Dowód.

$$P = 1 - 2\int\limits_0^1 x^\alpha \, dx = 1 - 2\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}.$$

$\square$

Figura, zawarta między $y = x^\alpha$ i $x = y^\alpha$

Rysunek 3:



Przykład II

Przykład 7. Znaleźć pole elipsy o półosiach a i b (rysunek 4):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

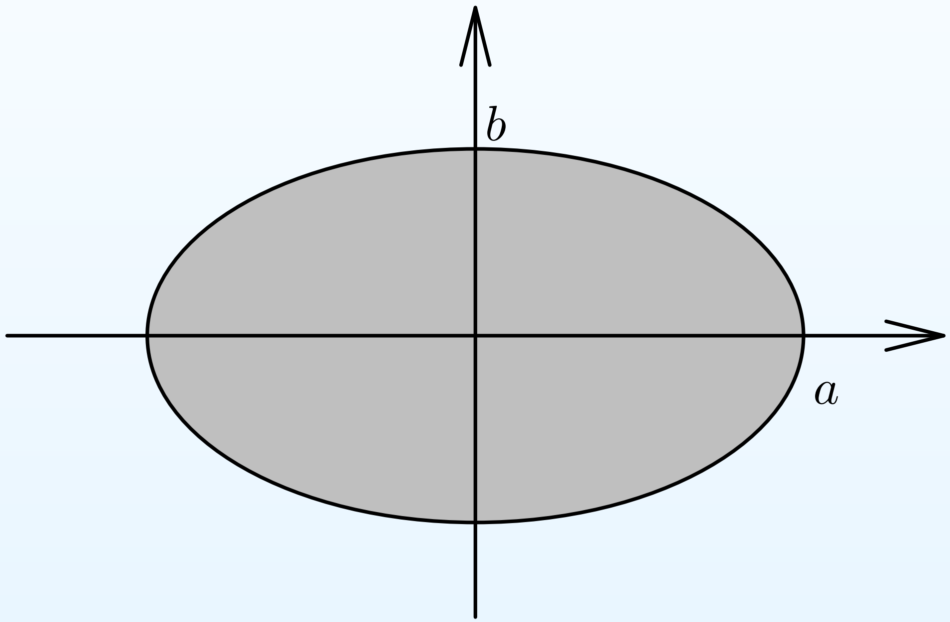
Dowód. Równanie parametryczne elipsy to $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [-\pi, \pi]$. Więc

$$P = 4\int_0^{\pi/2} a\cos t \cdot b\cos t\, dt = 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \pi ab + ab\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi a$$

$\square$

Elipsa o półosiach a i b

Rysunek 4:



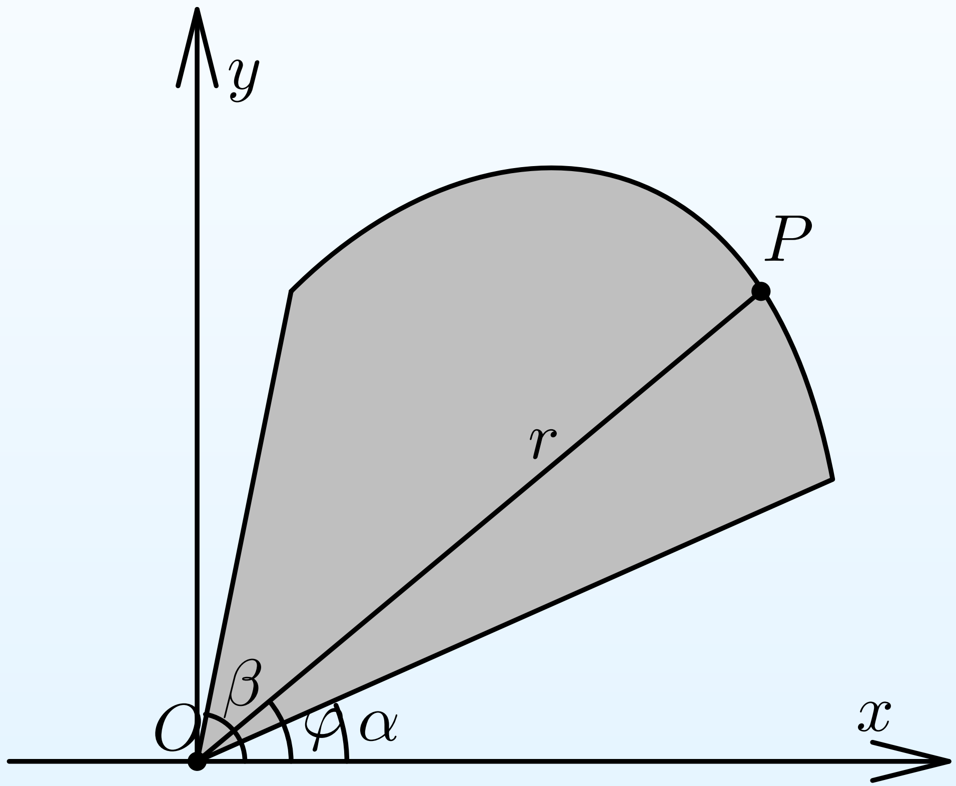
Współrzędne biegunowe

Definicja 8. *Współrzędne biegunowe* punktu $P(x, y)$ płaszczyzny zdefiniowane są jako para (r, φ), gdzie r jest odległością punktu P od początku układu $O(0, 0)$, a φ jest kątem (zorientowanym), jaki tworzy półprosta OP z osią Ox, rysunek 5.

- Oś Ox nazywa się *osią biegunową.*
- Spełnione są równości: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.
- Równanie $r = f(\varphi)$, gdzie $f(\varphi)$ jest ciągłą i nieujemna funkcją w przedziale $[\alpha, \beta]$, nazywa się *równaniem we współrzędnych biegunowych,* rysunek 5.

Współrzędne biegunowe

Rysunek 5:



Pole figury we współrzędnych biegunowych

Twierdzenie 9. *Jeżeli krzywa dana jest we współrzędnych biegunowych $r = f(\varphi)$, gdzie $f(\varphi)$ jest funkcją nieujemną ciągłą w przedziale $[\alpha, \beta]$, to pole obszaru, ograniczonego łukiem krzywej oraz promieniami o amplitudach α i β (rysunek 5), wyraża się wzorem*

$$P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Przykład

Przykład 10. Obliczyć pole, ograniczone rozetą trójkątną $r = \cos 3\varphi$, rysunek 6.

Dowód.

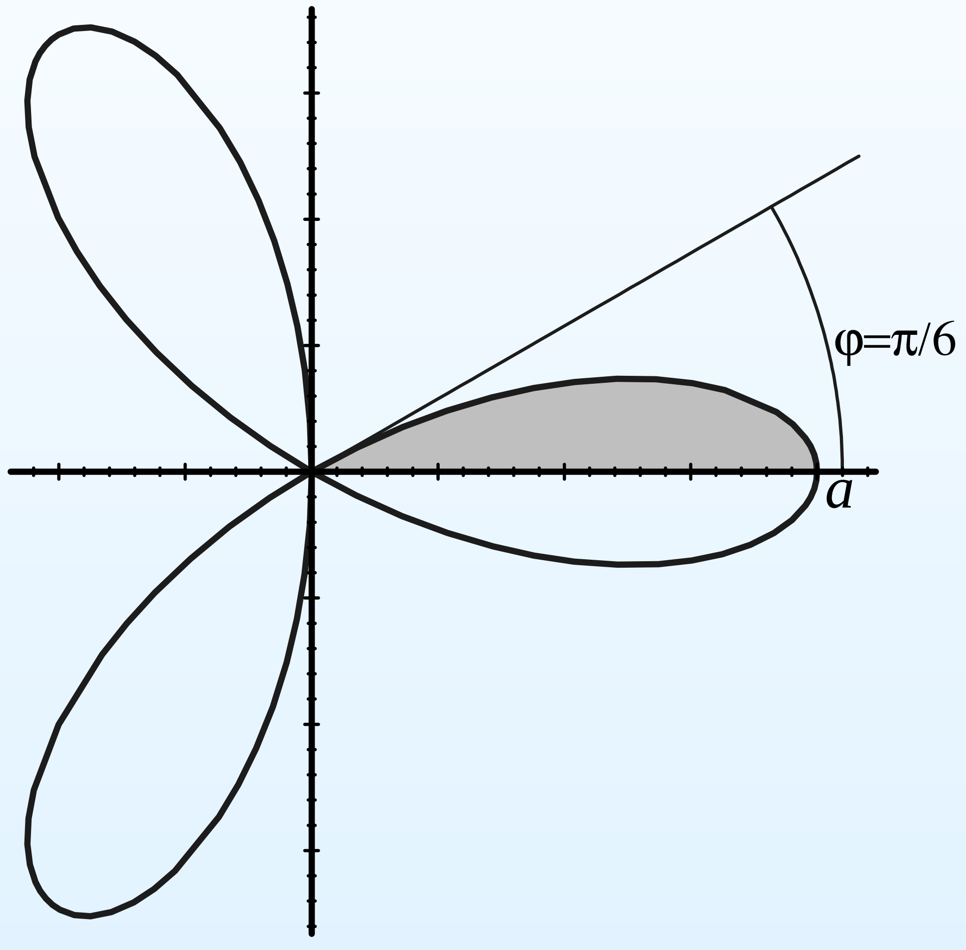
$$P = 6\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/6}\cos^2 3\varphi\, d\varphi = 3a^2\int_0^{\pi/6}\frac{1+\cos 6\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= 3a^2\left[\frac{\pi}{12} + \frac{\sin 6\varphi}{12}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right] = \frac{\pi a^2}{4}.$$

□

Rozeta trójkątna

Rysunek 6:



Obliczanie długości łuku

Twierdzenie 11. *Jeżeli krzywa wyznaczona jest równaniem postaci* $y = f(x)$, *gdzie* $f(x)$ *ma w przedziale* $[a, b]$ *pochodną ciągła, to długość łuku w tym przedziale wyraża się wzorem*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Twierdzenie 12. *Jeżeli krzywa wyznaczona jest równaniem parametrycznym* $x = g(t)$, $y = h(t)$, *gdzie funkcje* $g(t)$ *i* $h(x)$ *mają w przedziale* $[t_1, t_2]$ *pochodne ciągłe oraz łuk krzywej nie ma części wielokrotnych, to długość łuku w tym przedziale wyraża się wzorem*

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Długość łuku we współrzędnych biegunowych

Twierdzenie 13. *Jeżeli krzywa wyznaczona jest równaniem we współrzędnych biegunowych* $r = f(\varphi)$, *gdzie funkcja* $f(\varphi)$ *ma w przedziale* $[\alpha, \beta]$ *pochodną ciągłą oraz łuk krzywej nie ma części wielokrotnych, to długość łuku w tym przedziale wyraża się wzorem*

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi.$$

Długość łuku paraboli

Przykład 14. Obliczyć długość łuku paraboli $y = x^2$ w przedziale $[-1, 1]$.

Rozwiązanie.

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2} x \sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4} \ln\big(2x + \sqrt{1 + 4x^2}\big) \right]_{-1}^{1} =$$

$$= \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2} \right)$$

$\square$

Obwód asteroidy

Przykład 15. Obliczyć obwód asteroidy $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$, gdzie $a > 0$, rysunek 7.

Rozwiązanie.

$$L = 4\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt =$$

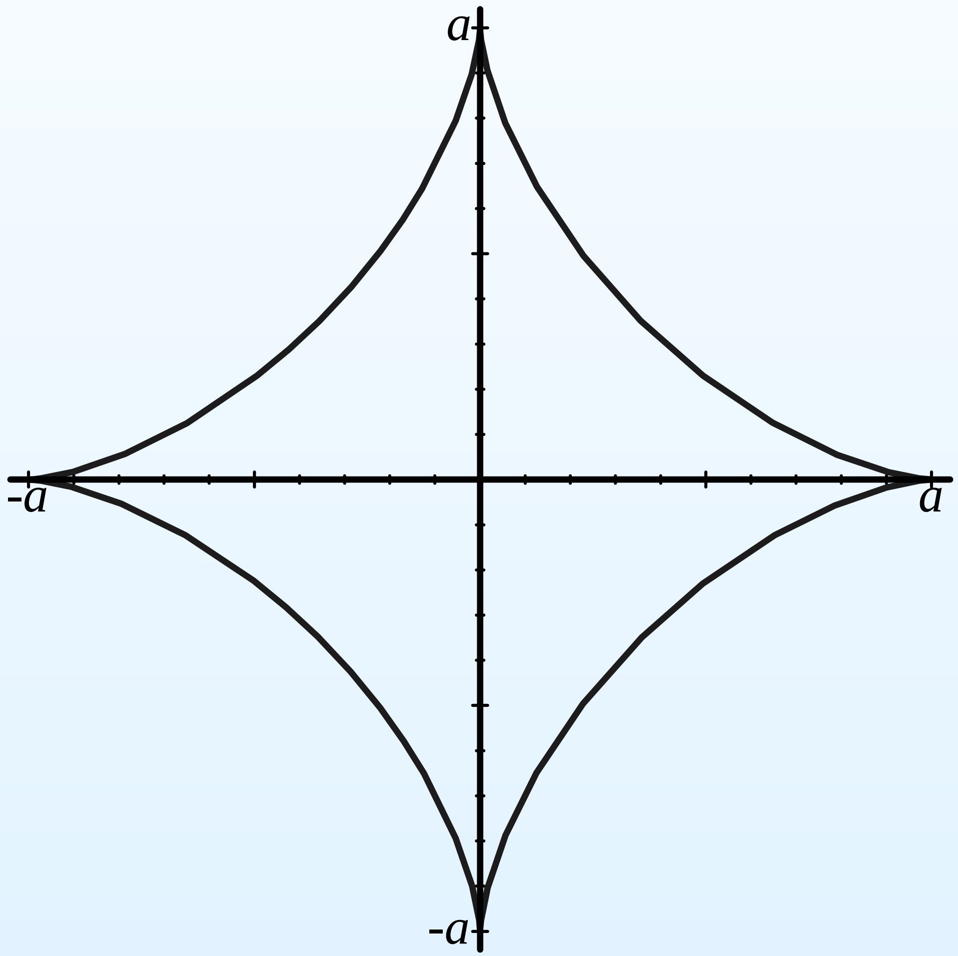
$$= 12a\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt =$$

$$= 6a\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2t\,dt = -3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a.$$

$\square$

Asteroida

Rysunek 7:



Obwód elipsy

Przykład 16. Obliczyć obwód elipsy $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, gdzie $a > b > 0$, $t \in [0, 2\pi]$, rysunek 4.

Dowód.

$$L = 4\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt = 4a\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 t}\,dt,$$

gdzie $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ nazywa się *mimośrodem* elipsy, zaś całka $\int \sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 t}\,dt$ nie wyraża się przez funkcje elementarne i nazywa się *całką eliptyczną*. □

Objętość pole powierzchni bryły obrotowej

Twierdzenie 17. *Niech dany będzie łuk AB (rysunek 8) krzywej o równaniu $y = f(x)$, gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą i niemalejącą w przedziale $[a, b]$. Wówczas* objętość bryły obrotowej,*bryła obrotowa ograniczonej powierzchnią, która powstaje, gdy łuk wraz z rzędnymi w końcach łuku obraca się dookoła osi Ox, obliczmy według wzoru*

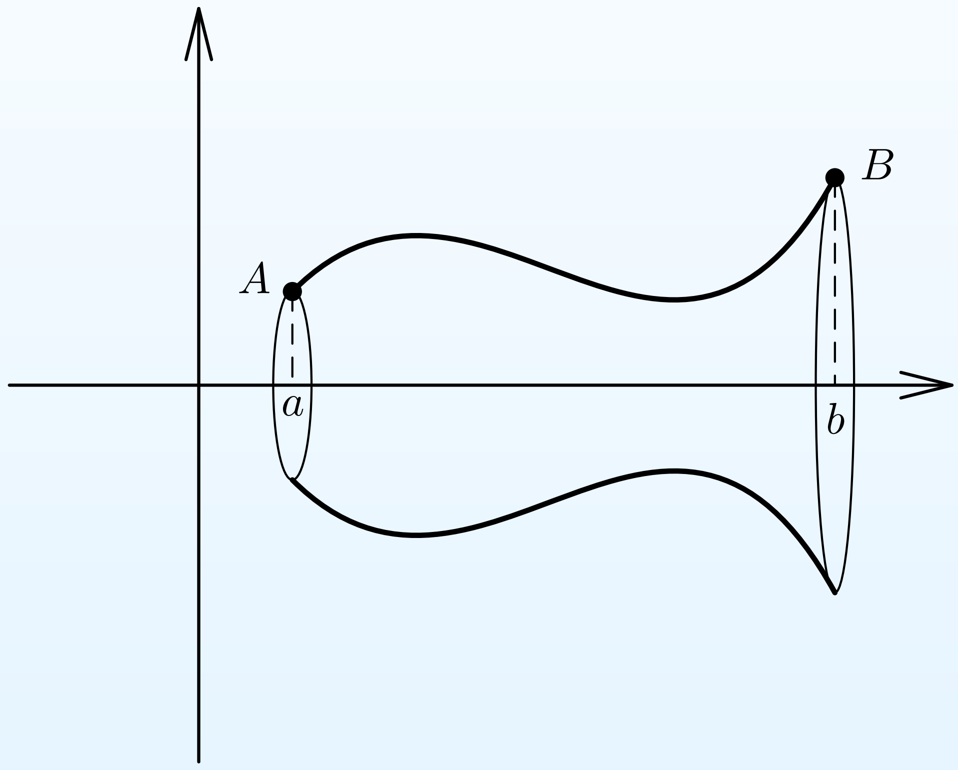
$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx.$$

Pole powierzchni obrotowej*powierzchnia obrotowa powstałej przez obrót łuku AB dookoła osi Ox, przy założeniu, że $f(x)$ ma pochodną ciągła, obliczamy według wzoru*

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx.$$

Bryła obrotowa

Rysunek 8:



Bryła obrotowa, równanie parametryczne

Twierdzenie 18. *Jeżeli równanie łuku dane jest w postaci parametrycznej* $x = g(t)$, *y*=$h(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, *przy czym obie funkcje mają w tym przedziale ciągłe pochodne, funkcja* $g(t)$ *jest w tym przedziale stale monotoniczna, a funkcja* $g(x)$ *przybiera wartości nieujemne, to na objętość bryły obrotowej mamy wzór*

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 \frac{dx}{dt}\, dt,$$

a na pole powierzchni obrotowej

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Objętość i pole powierzchni stożka

Przykład 19. Znaleźć objętość i pole powierzchni bocznej stożka o promieniu podstawy r i wysokości h.

Rozwiązanie. Stożek powstaje przy obrocie odcinka prostej o równaniu $y = \frac{r}{h}x$ dookoła osi Ox, rysunek 9.

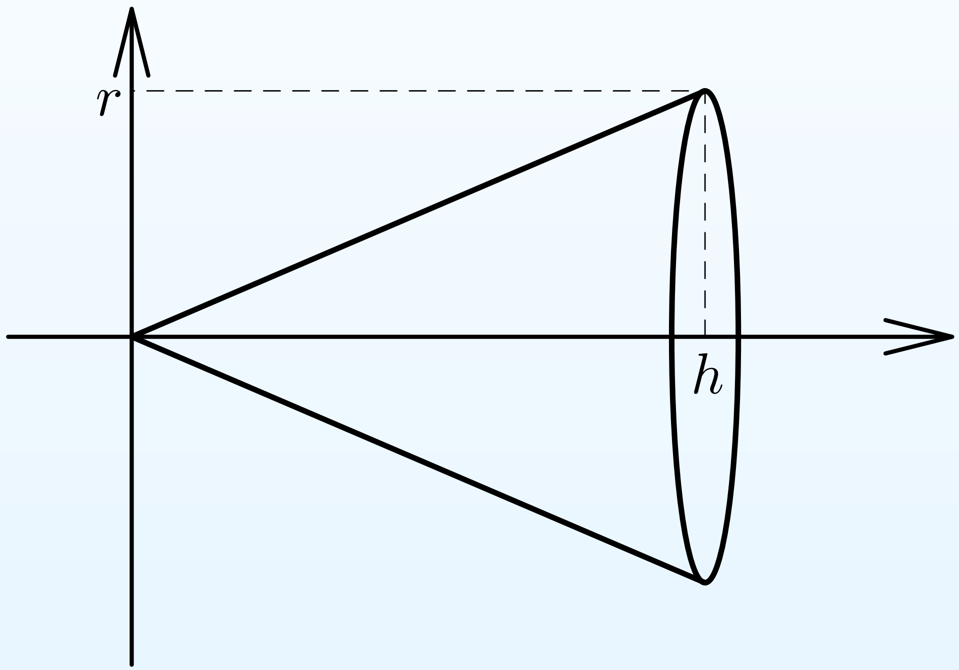
$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 \, dx = \frac{\pi r^2 x^3}{3h^2} \Big|_0^h = \frac{\pi}{3} r^2 h,$$

$$S = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2} \, dx = \frac{\pi r \sqrt{r^2 + h^2}}{h^2} x^2 \Big|_0^h = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}.$$

$\square$

Stożek

Rysunek 9:



Całkowanie stóp

Przykład 20. Producent samochodów osobowych ocenia, że roczna stopa przyrostu kosztu utrzymania produkowanego przezeń samochodu wyraża się wzorem

$$s(t) = 100 + 10t^2,$$

gdzie t oznacza wiek samochodu w latach, a $s(t)$ mierzone jest w zł/rok. Oblicz koszt utrzymania samochodu przez 3 lata (czyli $K(3)$).

Rozwiązanie.

$$K(3) = \int_0^3 s(t)\,dt \int_0^3 (100+10t^2)\,dt = \left[100t + \frac{10}{3}t\right]_0^3 = 300+90 = 390(\text{zł})$$

$\square$

Całkowanie stóp

Przykład 21. Wiadomo, że w czasie akcji charytatywnych przyrost dochodu jest wolniejszy wraz z upływem czasu akcji. Inaczej mówiąc, stopa przyrostu dochodu maleje z czasem. Załóżmy, że stopa ta wyraża się wzorem

$$s(t) = -100t^2 + 20\,000,$$

i mierzona jest w zł/dzień. Czas t mierzony jest w dniach. Załóżmy, że stopa przyrosyu kosztu akcji charytatywnej jest stała i równa $10\,000$ zł/dzień. Należy znaleźć:

1. czas trwania akcji, który daje maksymalny dochód,
2. wielkość tego dochodu,
3. koszt akcji,
4. zysk.

Całkowanie stóp

Rozwiązanie.

- Akcję warto prowadzić do chwili, gdy stopa przyrostu dochodu zrówna się ze stopą kosztu.
  - $-100t^2 + 20\,000 = 10\,000$
  - $t = 10$
- Wielkość dochodu otrzymamy całkując stopę przyrostu dochodu od 0 do 10.
  - $D(10) = \int\limits_0^{10} (-100t^2 + 20\,000)dt = \left[-\frac{100}{3}t^3 + 20\,000t\right]_0^{10} = 166\,666$ zł.
- Koszt akcji wyniesie $K(10) = 10 \cdot 10\,000 = 100\,000$ zł.
- Zatem zysk po 10 dniach wyniesie $Z(10) = D(10) - K(10) = 66\,666$ zł.

$\square$

Użyteczność towaru

- Załóżmy, że popyt na pewien towar jest następującą funkcją ceny: $PP(c) = c^2 - 40c + 400$.
- Niech podaż tego towaru wyraża się następująco $PD(c) = 10c$.
- Cena równowagi wynosi $c = 10$ przy popycie równym 1000.
- Przez *użyteczność* towaru rozumiemy jego wartość przy cenie równowagi, czyli $U = 10 \cdot 100 = 1000$.
- Użyteczność towaru wynosi tyle, ile zapłacą za niego klienci.
- Jest to pole prostokąta o przeciwległych wierzchołkach w $(0, 0)$ i $(10, 100)$.

Nadwyżka użyteczności towaru

- Są klienci, którzy kupiliby towar po cenie wyższej od ceny równowagi.
- Dopiero przy cenie $c = 20 >$ popyt spada do 0.
- Pole pod wykresem funkcji popytu dla zakresu cen od 10 do 20 również reprezentuje *nadwyżkę użyteczności tego towaru*.
- Dla naszego przykładu:
  - $\int\limits_{10}^{20}(c^2 - 40c + 400)\, dc = \left[\frac{1}{3}c^3 - 20c^2 + 400c\right]_{10}^{20} = 333.$
  - Zatem pełna użyteczność wyniesie $1000 + 333 = 1333.$