

*Matematyka*  
*Zastosowania geometryczne całek*

Aleksander Denisiuk

denisjuk@euh-e.edu.pl

Elbląska Uczelnia Humanistyczno-Ekonomiczna

ul. Lotnicza 2

82-300 Elbląg

## Zastosowania geometryczne całek

---

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

<http://denisjuk.euh-e.edu.pl/>

# Równania parametryczne krzywej

---

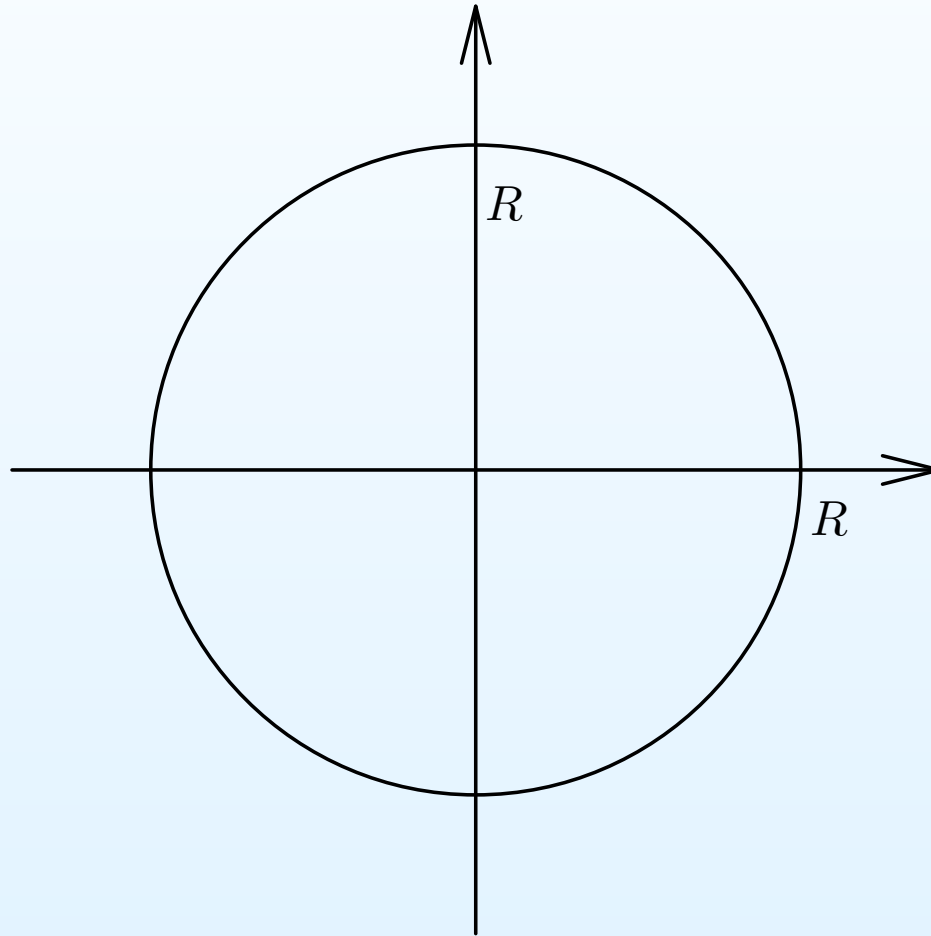
**Definicja 1.** Niech dane będą dwie ciągłe w przedziale  $[t_0, t_1]$  funkcje,

$$x = f(t) \text{ oraz } y = g(t). \quad (1)$$

Mówimy wówczas, że funkcje te określają *krzywą parametryczną* na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$ . Zmienna  $t$  nazywa się *parametrem*. O krzywej tej mówimy, że równania 1 są *równaniami parametrycznymi* tej krzywej.

## Przykłady krzywych parametrycznych: okrąg

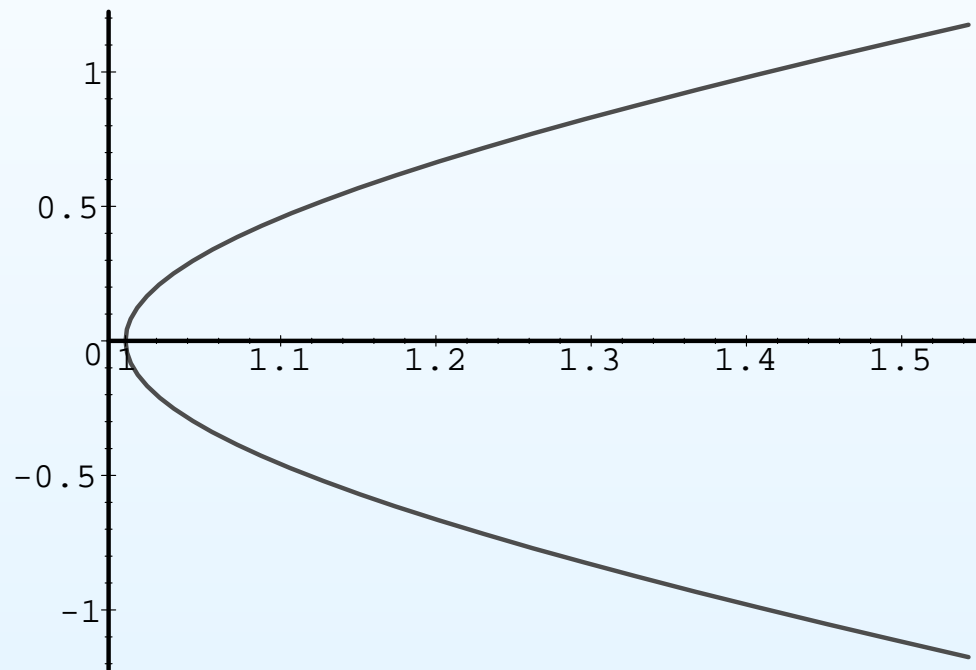
**Przykład 2.**  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  określa okrąg  $x^2 + y^2 = R^2$  o promieniu  $R$  i środku w punkcie  $(0, 0)$ :



## Przykłady krzywych parametrycznych: hyperbola

### Przykład 3.

$x = R \cosh t, y = R \sinh t, t \in [-1, 1]$  określa łuk hyperboli  
 $x^2 - y^2 = R^2$ :



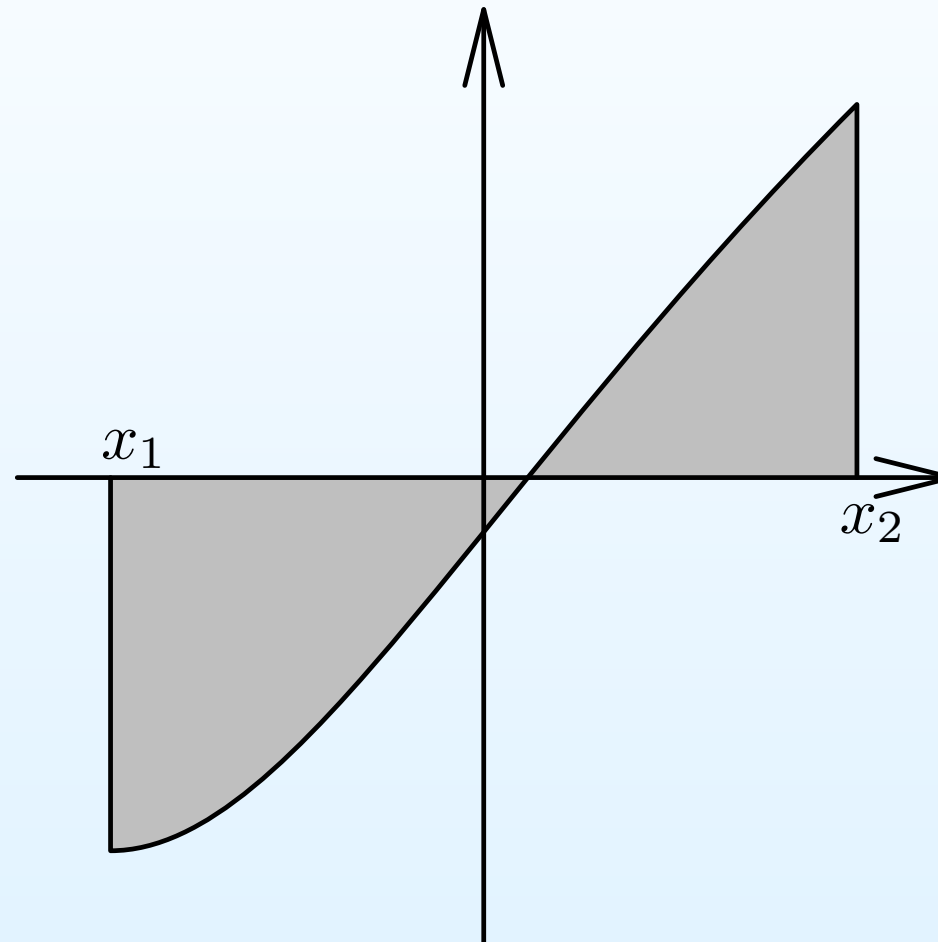
## Pole obszaru, ograniczonego krzywą parametryczną

**Twierdzenie 4.** Niech krzywa będzie określona równaniami parametrycznymi  $x = g(t)$ ,  $y = h(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , a przy tym funkcja  $g(t)$  jest rosnąca i ma w tym przedziale pochodną ciągłą, to pole obszaru, ograniczonego łukiem danej krzywej, odcinkiem osi  $Ox$  oraz dwoma prostymi  $x = x_1$ ,  $x = x_2$ , gdzie  $x_1 = g(t_0)$ ,  $x_2 = g(t_1)$  (rysunek 1), wyraża się wzorem

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |y| dx = \int_{t_0}^{t_1} |h(t)| g'(t) dt.$$

# Obszar, ograniczony krzywą parametryczną

Rysunek 1:



## Pole obszaru, ograniczonego krzywą parametryczną

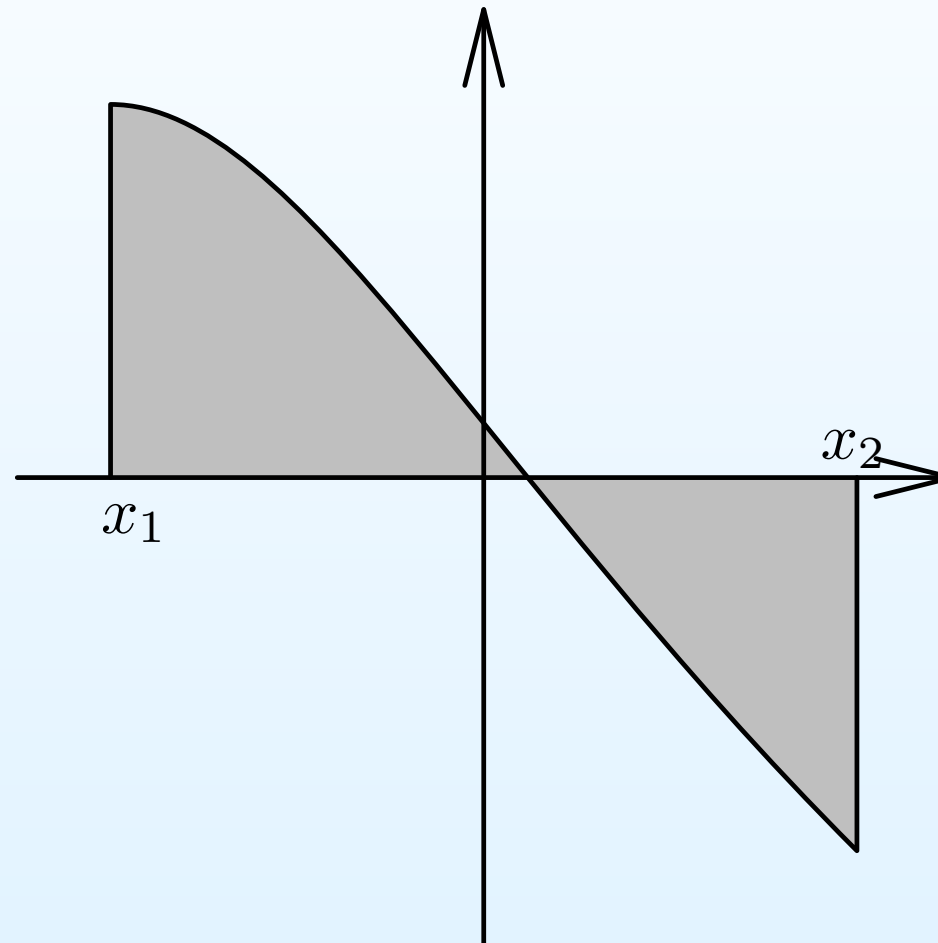
**Twierdzenie 5.** *Jeżeli dana krzywa jest określona równaniami parametrycznymi w postaci  $x = g(t)$ ,  $y = h(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , a przy tym funkcja  $g(t)$  jest malejąca i ma w tym przedziale pochodną ciągłą, to pole obszaru, ograniczonego łukiem danej krzywej, odcinkiem osi  $Ox$  oraz dwoma prostymi  $x = x_1$ ,  $x = x_2$ , gdzie  $x_1 = g(t_1)$ ,  $x_2 = g(t_0)$  (rysunek referencyjny), wyraża się wzorem*

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |y| dx = - \int_{t_1}^{t_0} |h(t)| g'(t) dt.$$



## Obszar, ograniczony krzywą parametryczną — II

Rysunek 2:



## Przykład

**Przykład 6.** Znaleźć pole figury, zawartej między krzywymi  $y = x^\alpha$  i  $x = y^\alpha$ , rysunek 3.

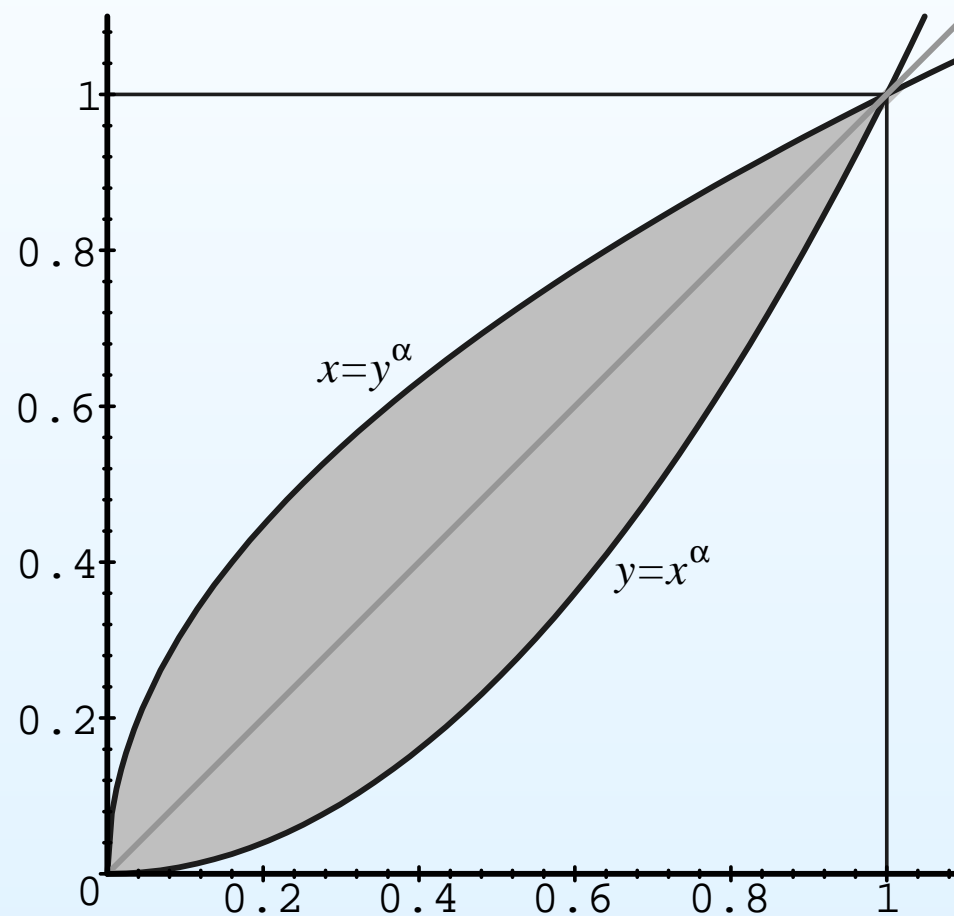
*Dowód.*

$$P = 1 - 2 \int_0^1 x^\alpha dx = 1 - 2 \left[ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_0^1 = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}.$$

□

Figura, zawarta między  $y = x^\alpha$  i  $x = y^\alpha$

Rysunek 3:



## Przykład II

**Przykład 7.** Znaleźć pole elipsy o półosiach  $a$  i  $b$  (rysunek 4):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

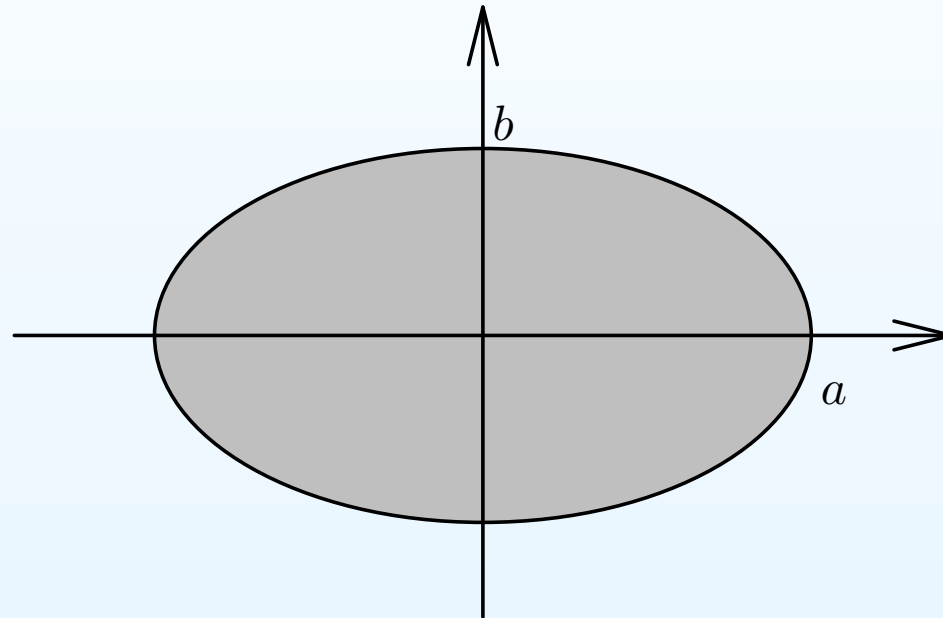
*Dowód.* Równanie parametryczne elipsy to  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ ,  
 $t \in [-\pi, \pi]$ . Więc

$$P = 4 \int_0^{\pi/2} a \cos t \cdot b \sin t \, dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \pi ab + ab \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} = \pi ab$$

□

## Elipsa o półosiach $a$ i $b$

Rysunek 4:



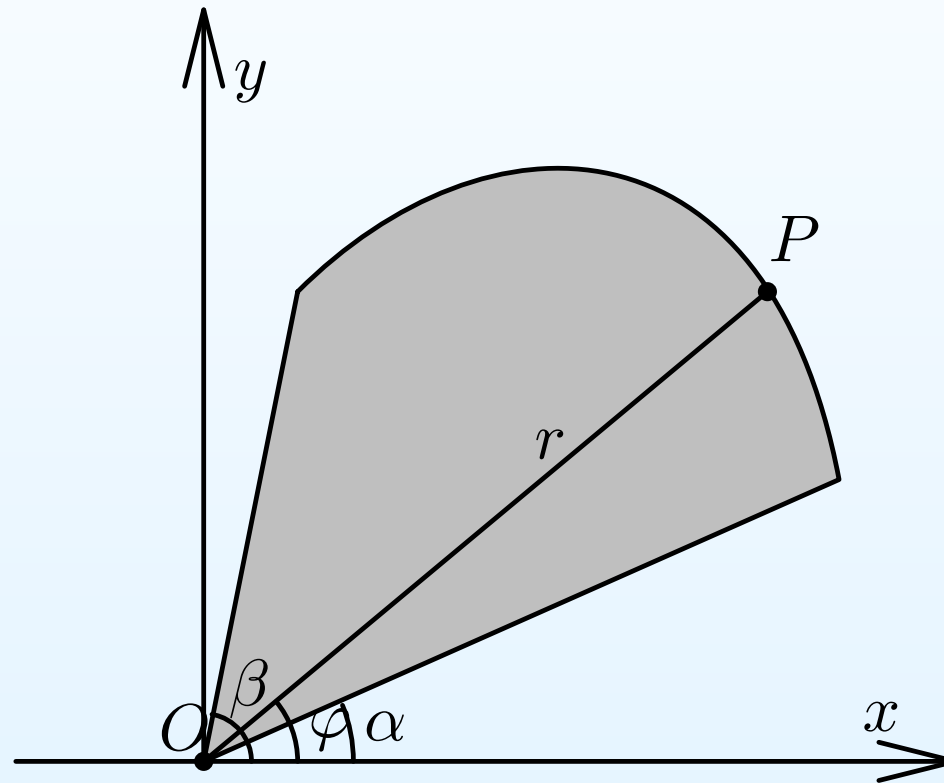
# Współrzędne biegunowe

**Definicja 8.** *Współrzędne biegunowe* punktu  $P(x, y)$  płaszczyzny zdefiniowane są jako para  $(r, \varphi)$ , gdzie  $r$  jest odległością punktu  $P$  od początku układu  $O(0, 0)$ , a  $\varphi$  jest kątem (zorientowanym), jaki tworzy półprosta  $OP$  z osią  $Ox$ , rysunek 5.

- Oś  $Ox$  nazywa się *osią biegunową*.
- Spełnione są równości:  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .
- Równanie  $r = f(\varphi)$ , gdzie  $f(\varphi)$  jest ciągłą i nieujemną funkcją w przedziale  $[\alpha, \beta]$ , nazywa się *równaniem we współrzędnych biegunowych*, rysunek 5.

# Współrzędne biegunowe

Rysunek 5:



## Pole figury we współrzędnych biegunowych

---

**Twierdzenie 9.** *Jeżeli krzywa dana jest we współrzędnych biegunowych  $r = f(\varphi)$ , gdzie  $f(\varphi)$  jest funkcją nieujemną ciągłą w przedziale  $[\alpha, \beta]$ , to pole obszaru, ograniczonego łukiem krzywej oraz promieniami o amplitudach  $\alpha$  i  $\beta$  (rysunek 5), wyraża się wzorem*

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi.$$



## Przykład

**Przykład 10.** Obliczyć pole, ograniczone rozetą trójkątną  $r = \cos 3\varphi$ , rysunek 6.

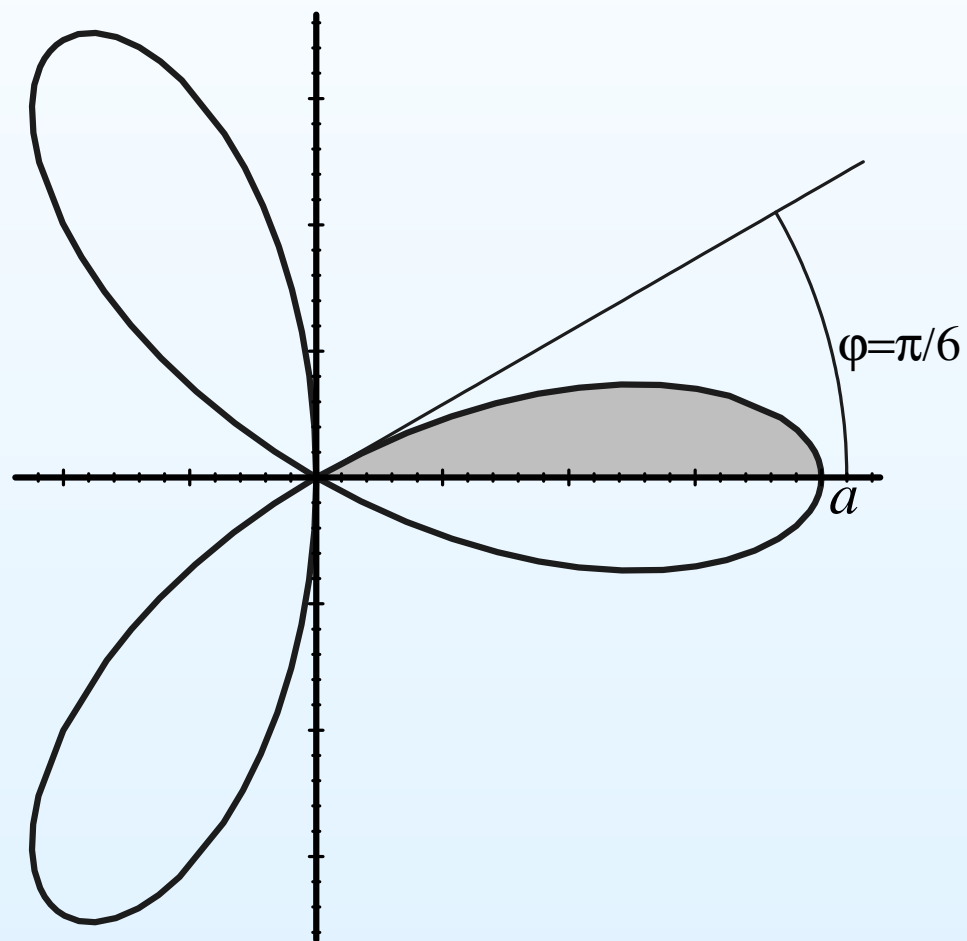
*Dowód.*

$$\begin{aligned} P &= 6 \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/6} \cos^2 3\varphi \, d\varphi = 3a^2 \int_0^{\pi/6} \frac{1 + \cos 6\varphi}{2} \, d\varphi = \\ &= 3a^2 \left[ \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 6\varphi}{12} \right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi a^2}{4}. \end{aligned}$$

□

# Rozeta trójkątna

Rysunek 6:



## Obliczanie długości łuku

**Twierdzenie 11.** *Jeżeli krzywa wyznaczona jest równaniem postaci  $y = f(x)$ , gdzie  $f(x)$  ma w przedziale  $[a, b]$  pochodną ciągłą, to długość łuku w tym przedziale wyraża się wzorem*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

**Twierdzenie 12.** *Jeżeli krzywa wyznaczona jest równaniem parametrycznym  $x = g(t)$ ,  $y = h(t)$ , gdzie funkcje  $g(t)$  i  $h(t)$  mają w przedziale  $[t_1, t_2]$  pochodne ciągłe oraz łuk krzywej nie ma części wielokrotnych, to długość łuku w tym przedziale wyraża się wzorem*

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

## Długość łuku we współrzędnych biegunowych

**Twierdzenie 13.** *Jeżeli krzywa wyznaczona jest równaniem we współrzędnych biegunowych  $r = f(\varphi)$ , gdzie funkcja  $f(\varphi)$  ma w przedziale  $[\alpha, \beta]$  pochodną ciągłą oraz łuk krzywej nie ma części wielokrotnych, to długość łuku w tym przedziale wyraża się wzorem*

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi.$$

## Długość łuku paraboli

**Przykład 14.** Obliczyć długość łuku paraboli  $y = x^2$  w przedziale  $[-1, 1]$ .

*Rozwiązanie.*

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \\ &= \left[ \frac{1}{2} x \sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4} \ln(2x + \sqrt{1 + 4x^2}) \right]_{-1}^1 = \\ &= \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2} \right) \end{aligned}$$

□

## Obwód asteroidy

**Przykład 15.** Obliczyć obwód asteroidy  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , gdzie  $a > 0$ , rysunek 7.

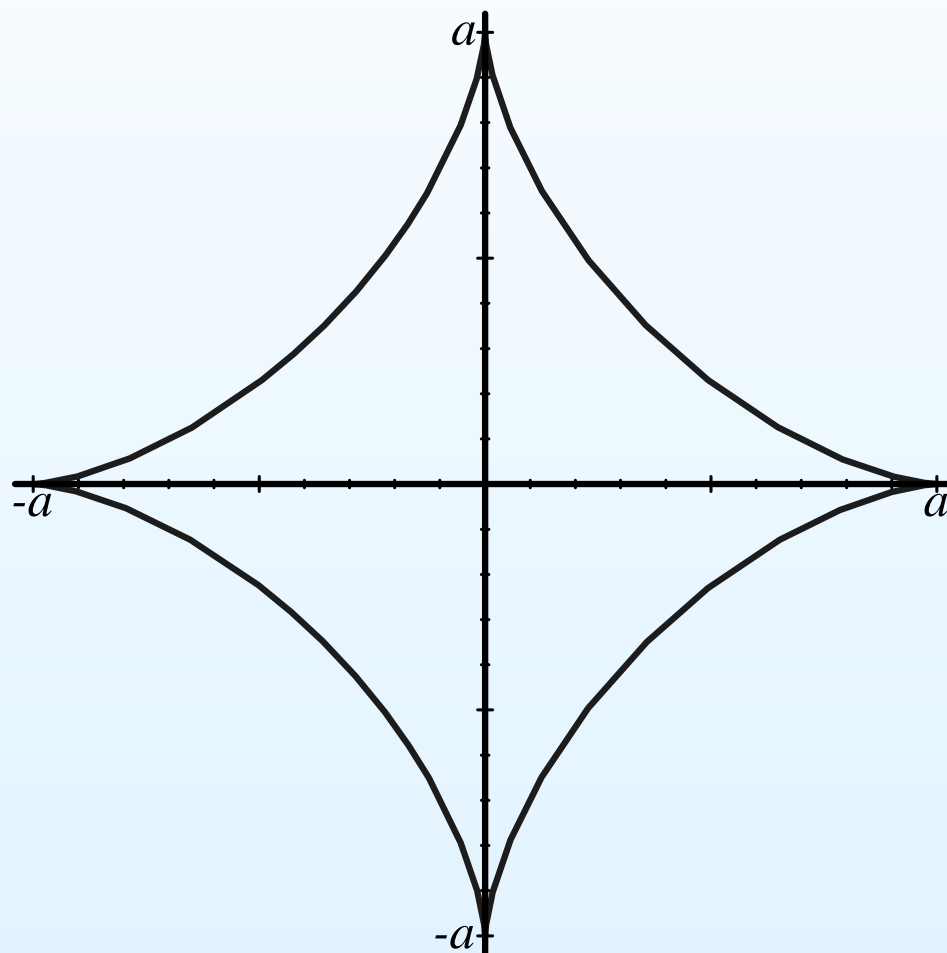
*Rozwiązanie.*

$$\begin{aligned} L &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = \\ &= 12a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = \\ &= 6a \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = -3a \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a. \end{aligned}$$



# Asteroida

Rysunek 7:



## Obwód elipsy

**Przykład 16.** Obliczyć obwód elipsy  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ , gdzie  $a > b > 0$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , rysunek 4.

*Dowód.*

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt,$$

gdzie  $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$  nazywa się *mimośrodem* elipsy, zaś całka  $\int \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt$  nie wyraża się przez funkcje elementarne i nazywa się *całką eliptyczną*. □



## Objętość pole powierzchni bryły obrotowej

**Twierdzenie 17.** Niech dany będzie łuk  $AB$  (rysunek 8) krzywej o równaniu  $y = f(x)$ , gdzie  $f(x)$  jest funkcją ciągłą i niemalejącą w przedziale  $[a, b]$ . Wówczas objętość bryły obrotowej, bryła obrotowa ograniczonej powierzchnią, która powstaje, gdy łuk wraz z rzędnymi w końcach łuku obraca się dookoła osi  $Ox$ , obliczmy według wzoru

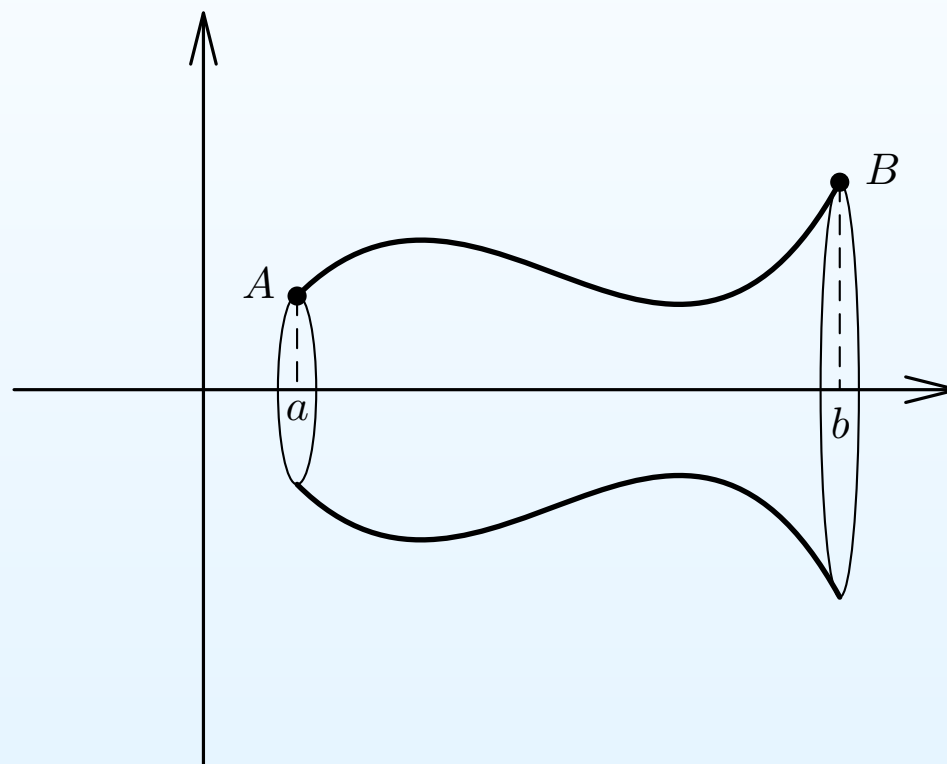
$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Pole powierzchni obrotowej powierzchnia obrotowa powstałej przez obrót łuku  $AB$  dookoła osi  $Ox$ , przy założeniu, że  $f(x)$  ma pochodną ciągłą, obliczamy według wzoru

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

# Bryła obrotowa

Rysunek 8:



## Bryła obrotowa, równanie parametryczne

**Twierdzenie 18.** *Jeżeli równanie łuku dane jest w postaci parametrycznej  $x = g(t)$ ,  $y=h(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ , przy czym obie funkcje mają w tym przedziale ciągłe pochodne, funkcja  $g(t)$  jest w tym przedziale stale monotoniczna, a funkcja  $g(x)$  przybiera wartości nieujemne, to na objętość bryły obrotowej mamy wzór*

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 \frac{dx}{dt} dt,$$

*a na pole powierzchni obrotowej*

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

## Objętość i pole powierzchni stożka

**Przykład 19.** Znaleźć objętość i pole powierzchni bocznej stożka o promieniu podstawy  $r$  i wysokości  $h$ .

*Rozwiązanie.* Stożek powstaje przy obrocie odcinka prostej o równaniu  $y = \frac{r}{h}x$  dookoła osi  $Ox$ , rysunek 9.

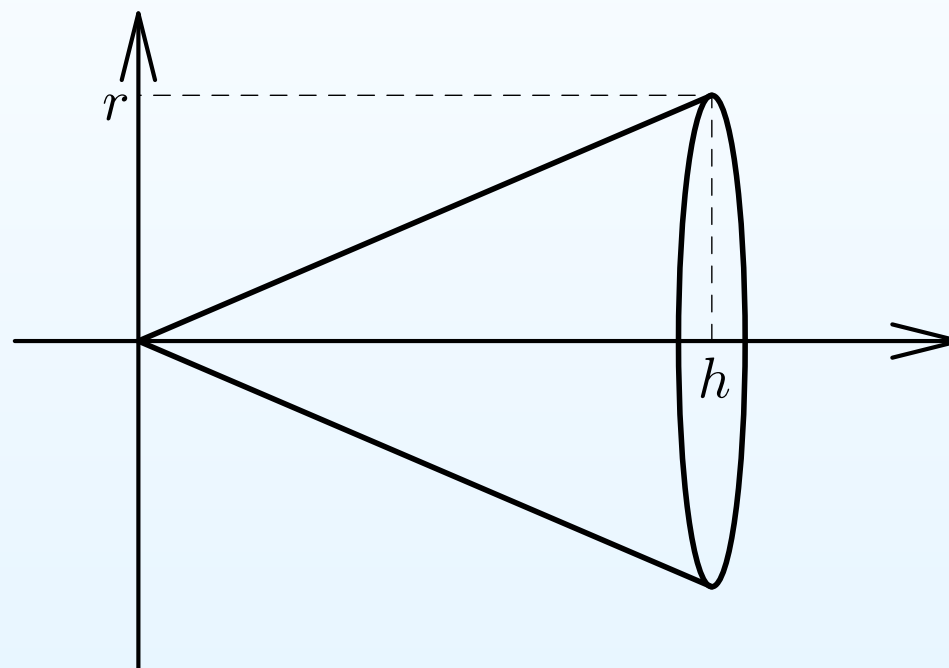
$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \frac{\pi r^2 x^3}{3h^2} \Big|_0^h = \frac{\pi}{3} r^2 h,$$

$$S = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2} dx = \frac{\pi r \sqrt{r^2 + h^2}}{h^2} x^2 \Big|_0^h = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}.$$

□

# Stożek

Rysunek 9:



## Całkowanie stóp

**Przykład 20.** Producent samochodów osobowych ocenia, że roczna stopa przyrostu kosztu utrzymania produkowanego przezeń samochodu wyraża się wzorem

$$s(t) = 100 + 10t^2,$$

gdzie  $t$  oznacza wiek samochodu w latach, a  $s(t)$  mierzone jest w zł/rok. Oblicz koszt utrzymania samochodu przez 3 lata (czyli  $K(3)$ ).

*Rozwiązanie.*

$$K(3) = \int_0^3 s(t) dt = \int_0^3 (100 + 10t^2) dt = \left[ 100t + \frac{10}{3}t^3 \right]_0^3 = 300 + 90 = 390(\text{zł})$$

□

## Całkowanie stóp

**Przykład 21.** Wiadomo, że w czasie akcji charytatywnych przyrost dochodu jest wolniejszy wraz z upływem czasu akcji. Inaczej mówiąc, stopa przyrostu dochodu maleje z czasem. Załóżmy, że stopa ta wyraża się wzorem

$$s(t) = -100t^2 + 20\,000,$$

i mierzona jest w zł/dzień. Czas  $t$  mierzony jest w dniach. Załóżmy, że stopa przyrostu kosztu akcji charytatywnej jest stała i równa 10 000 zł/dzień. Należy znaleźć:

1. czas trwania akcji, który daje maksymalny dochód,
2. wielkość tego dochodu,
3. koszt akcji,
4. zysk.

## Całkowanie stóp

*Rozwiązanie.* • Akcję warto prowadzić do chwili, gdy stopa przyrostu dochodu zrówna się ze stopą kosztu.

- $-100t^2 + 20\,000 = 10\,000$
- $t = 10$

- Wielkość dochodu otrzymamy całkując stopę przyrostu dochodu od 0 do 10.

- $$D(10) = \int_0^{10} (-100t^2 + 20\,000) dt = \left[ -\frac{100}{3}t^3 + 20\,000t \right]_0^{10} = 166\,666 \text{ zł.}$$

- Koszt akcji wyniesie  $K(10) = 10 \cdot 10\,000 = 100\,000 \text{ zł.}$

- Zatem zysk po 10 dniach wyniesie  $Z(10) = D(10) - K(10) = 66\,666 \text{ zł.}$





## Użyteczność towaru

- Załóżmy, że popyt na pewien towar jest następującą funkcją ceny:  $PP(c) = c^2 - 40c + 400$ .
- Niech podaż tego towaru wyraża się następująco  $PD(c) = 10c$ .
- Cena równowagi wynosi  $c = 10$  przy popycie równym 1000.
- Przez *użyteczność* towaru rozumiemy jego wartość przy cenie równowagi, czyli  $U = 10 \cdot 100 = 1000$ .
- Użyteczność towaru wynosi tyle, ile zapłacą za niego klienci.
- Jest to pole prostokąta o przeciwległych wierzchołkach w  $(0, 0)$  i  $(10, 100)$ .

## Nadwyżka użyteczności towaru

---

- Są klienci, którzy kupiliby towar po cenie wyższej od ceny równowagi.
- Dopiero przy cenie  $c = 20 >$  popyt spada do 0.
- Pole pod wykresem funkcji popytu dla zakresu cen od 10 do 20 również reprezentuje *nadwyżkę użyteczności tego towaru*.
- Dla naszego przykładu:
  - $\int_{10}^{20} (c^2 - 40c + 400) dc = \left[ \frac{1}{3}c^3 - 20c^2 + 400c \right]_{10}^{20} = 333.$
  - Zatem pełna użyteczność wyniesie  $1000 + 333 = 1333.$