Matematyka

Macierze

Aleksander Denisiuk

denisjuk@euh-e.edu.pl

Elbląska Uczelnia Humanistyczno-Ekonomiczna

ul. Lotnicza 2

82-300 Elbląg

Macierze

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

`http://denisjuk.euh-e.edu.pl/`

Definicja

Definicja 1. *Macierzą* $n \times m$ nazywamy prostokątną tablicę liczb:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Mówimy również, że macierz A ma n *wierszy* i m *kolumn.* Zapis a_{ik} oznacza, że element ten znajduje się w i-tym wierszu i k-tej kolumnie. Jeżeli $m = n$, macierz nazywa się *kwadratową stopnia* n*.*

Wektor

Definicja 2. Macirez $n \times 1$ nazywamy *wektorem.* Elementy wektora nazywamy *współrzędnymi* i oznaczamy

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Równość macierzy

Definicja 3. Dwie macierze A i B tego samego wymiaru $n \times m$ są *równe*, jeśli wszystkie odpowiednie elementy macierzy położone na tych samych miejscach są równe, i. e.

$$a_{ik} = b_{ik} \quad i = 1, \ldots, n, \;\; k = 1, \ldots, m.$$

Macierz transponowana

Definicja 4. Macierzą *transponowaną* (lub *przestawioną*) nazywamy macierz, która powstaje z danej macierzy przez zmianę wierszy przez kolumny:

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Przykład 5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

- $\left(A^t\right)^t = A$.

Macierz zerowa

Definicja 6. Macierzą *zerową* nazywamy dowolnego wymiaru macierz, której wszystkie elementy są równe zeru.

Przykład 7. Macierze zerowe: $\mathbb{O}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{O}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Macierz trójkątna

Definicja 8. Macierz jest *trójkątną,* jeśli $a_{ij} = 0$ przy $i > j$.

Przykład 9. Macierze trójkątne: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$

Macierz symetryczna

Definicja 10. Macierz kwadratowa jest *symetryczną*, jeżeli $\forall i, j = 1, \ldots, n$ $a_{ij} = a_{ji}$.

- Macierz jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $A^t = A$.

Przykład 11. Macierz symetryczna: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Macierz diagonalna

Definicja 12. Macierz kwadratowa nazywa się *diagonalną (przekątną)*, jeśli $a_{ij} = 0$ przy $i \neq j$.

Przykład 13. Macierz diagonalna: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

macierz jednostkowa

Definicja 14. Macierz kwadratowa jest *jednostkową,* jeśli

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{przy } i \neq j, \\ 1 & \text{przy } i = j. \end{cases}$$

Przykład 15. Macierz jednostkowa: $\mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dodawanie macierzy

Definicja 16. *Sumą* dwóch macierzy A i B tego samego wymiary jest macierz $C = A + B$ tegoż wymiary, taka że $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Przykład 17. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$

Własności dodawania macierzy

- $A + B = B + A$ — *przemienność,*
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ — *łączność*
- $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$ — macierz zerowa jest elementem *neutralnym,*
- dla każdej macierzy A istnieje macierz *przeciwna* $-A$, taka że $A + (-A) = (-A) + A = \mathbb{O}$.
- $A - B = A + (-B)$.

Mnożenie macierzy przez liczbę

Definicja 18. *Iloczynem* liczby rzeczywistej λ i macierzy A jest macierz $C = \lambda A$ tego samego wymiary, taka że $c_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Przykład 19. $5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & 0 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}.$

Właściwości mnożenia macierzy przez liczbę

- Mnożenie macierzy przez liczbę posiada własności *liniowości:*
  - $1 \cdot A = A$,
  - $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$,
  - $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
  - $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Przestrzeń liniowa $\mathbb{R}^n$

Definicja 20. Zbiór n-wymiarowych wektorów, razem z określonymi w definicjach 16 i 18 działaniami dodawania i mnożenia przez liczbę rzeczywistą nazywa się *przestrzenią liniową (wektorową)* $\mathbb{R}^n$.

Mnożenie macierzy

Definicja 21. *Iloczynem* macierzy A wymiaru $n \times r$ przez macierz B wymiaru $r \times m$ jest macierz C wymiaru $n \times m$, której element c_{ij} jest równy

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kr}.$$

Przykład 22.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -11 & 7 & 12 \\ -11 & -11 & 2 & 16 \\ 13 & -8 & 11 & 4 \end{pmatrix}.$$

Uwaga 23.

$$AB \neq BA$$

Właściwości mnożenia macierzy

- Założymy, że we wszystkich przypadkach mnożenie macierzy jest określone poprawnie.
- $A(BC) = (AB)C$,
- $\mathbb{O}A = \mathbb{O}$, $A\mathbb{O} = \mathbb{O}$,[a]
- $\mathbb{I}A = A\mathbb{I} = A$,[b]
- $A(B + C) = AB + AC$,
- $(A + B)C = AC + BC$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad A(\lambda B) = \lambda(AB)$.

---

[a] w tym przykładzie $\mathbb{O}$ w każdym przypadku oznacza zerową macierz różnych wymiarów.

[b] w tym przykładzie w każdym przypadku $\mathbb{I}$ oznacza jednostkową macierz różnych wymiarów.

Macierz odwrotna

Definicja 24. Niech A będzie $n \times n$ macierzą. *Macierzą odwrotną* nazywa się macierz A^{-1}, taka że $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}$.

Uwaga 25*.* Macierz odwrotna istnieje nie dla wszystkich macierzy kwadratowych A.