Statystyka Opisowa z Demografią oraz Biostatystyka

Podstawy Teorii Prawdopodobieństwa

Aleksander Denisiuk

denisjuk@euh-e.edu.pl

Elbląska Uczelnia Humanistyczno-Ekonomiczna

ul. Lotnicza 2

82-300 Elbląg

Podstawy Teorii Prawdopodobieństwa

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

http://denisjuk.euh-e.edu.pl/

Zdarzenia elementarne

- doświadczenie losowe
  - nie można przewidzieć wyników
- zdarzenie elementarne
  - może zajść lub nie zajść
  - jedno na pewno zajdzie
  - zajście jednego wyklucza zajście innego
- Przestrzeń zdarzeń elementarnych E
  - $e_i \in E$

Przykłady przestrzeni zdarzeń

- jednokrotny rzut kostką
- określenie procentu cukru w burakach
- rzucanie monetą do pierwszego pojawienia się reszki

Zdarzenia losowe

- podbiory E
- zdarzenie *pewne*
- zdarzenie niemożliwe

Działania mnogościowe

- suma (alternatywa)
- iloczyn (koniunkcja)
- różnica
- zdarzenie przeciwne
- zdarzenie A pociąga za sobą (implikuje) zdarzenie B
- wykresy Venna

Przykład działań

- $A = \{ e_1, e_2, e_3 \}$
- zdarzenia: $A_1 = \emptyset$, $A_2 = \{ e_1 \}$, $A_3 = \{ e_2 \}$, $A_4 = \{ e_3 \}$, $A_5 = \{ e_1, e_2 \}$, $A_6 = \{ e_1, e_3 \}$, $A_7 = \{ e_2, e_3 \}$, $A_8 = \{ e_1, e_2, e_3 \}$

1. $A_1 \cap A_8$,
2. $A_6 \cap A_7$,
3. $A_4 \cap A_5$,
4. $A_2 \cup A_7$,
5. $A_5 \cup A_6$,
6. $A_1 \cup A_2 \cup A_3$,
7. $A_6 \setminus A_2$,
8. $A_3 \setminus A_6$,
9. $\bar{A}_7$,
10. $\bar{A}_8$,
11. $\bar{A}_1$,
12. $A_1 \cap A_2 \cap A_3$

Ciało zdarzeń doświadczenia

- ciało zdarzeń S jest takim zbiorem zdarzeń, w którym możliwe jest utworzenie sum, iloczynów, różnic, zdarzeń przeciwnych, pewnych oraz niemożliwych
- *zdarzenie losowe* odnosi się tylko do tych zbiorów zdarzeń elementarnych. które zostały zaliczone do ciała zdarzeń

Prawdopodobieństwo

- (E, S) nazywa się *przestrzenią mierzalną*
- $A \in S$ nazywa się S-mierzalnym
- $P : S \to \mathbb{R}$ nazywa się *prawdopodobieństwem,* jeżeli
  1. $\forall A \in S$, $P(A) \geqslant 0$
  2. $P(E) = 1$
  3. $P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n)$ dla zdarzeń rozłącznych
- (E, S, P) nazywa się *przestrzenią probabilistyczną*

Przykłady przestrzeni probabilistycznych

- jednokrotny rzut monetą
- jednokrotny rzut kostką
  - otrzymanie parzystej liczby oczek
  - otrzymanie liczby oczek większej niż 4
- przwdopodobieństwo wygranej w lotto
- losowanie punktu w przedziale

Zależność zdarzeń

- A i B *niezależne,* jeżeli zajśłcie jednego z nich nie ma wpływu na prawdopodobieństwo grugiego
- jeżeli prawdopodobieństwo A zależy od zajścia B, to *zależne*
  - W urnie 7 kul białych i 3 carne
  - $A =$(wyciągnięci białej kuli za pierwszym razem)
  - $A =$(wyciągnięci białej kuli za grugim razem)
    - losowanie ze zwracaniem
    - losowanie bez zwracania

Prawdopodobieństwo warunkowe

- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, jeśli $P(B) > 0$
- $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, jeśli $P(A) > 0$
- dla zdarzeń zależnych $P(A|B) \neq P(A)$ lub $P(B|A) \neq P(B)$
- dla niezależnych $P(A|B) = P(A)$ i $P(B|A) = P(B)$

Prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń

- $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B)P(B|A)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A) = P(C|A \cap B)$
- etc

Przykłady

- wylosowanie dwóch asów w dwóch kolejnych ciągnięciach bez zwracania
- w urnie 5 białych kul, 4 czarne i 3 niebieskie, prawdopodobieństwo (B, C, N)
- zakupino dwie zrdapki: prawdopodobieństwo wygranej w jednej $0{,}65$, w grugiej $0{,}7$. Prawopodobieństwo wygranej w obu zdrapkach

Niezależność zespołowa

- zdarzenia $A_1, A_2, \ldots A_n$
- przykład:
  - cztery paski parieru: $110, 101, 011, 000$
  - A_1=(wyciągnięcie paska z jedynką na pierwszym miejscu)
  - A_2=(wyciągnięcie paska z jedynką na grugim miejscu)
  - A_3=(wyciągnięcie paska z jedynką na trzecim miejscu)
    - niezależne parami
    - zależne zespołowo

Prawdopodobieństwo łącznego zajścia

- zdarzenia niezależne zespołowo:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n)$$

- przykład:
  - trzy pudełka po 10 detali: odpowiednio 8, 7, 9 sztuk standardowych
  - wyciągamy po jednym z każdego
  - prawdopodobieństwo tego, że wszystkie trzy będą standardowe

Prawdopodobieństwo zajścia co najmniej jednego

- zdarzenia niezależne zespołowo:
  $P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n)$
- zdarzenia mają to same prawdopodobieństwo, $P(A_i) = p$:
  $P(A) = 1 - (1-p)^n = 1 - q^n$
- przykłady:
  - prawdopodobieństwa trafienia do celu z trzech dział: $0{,}8$, $0{,}7$, $0{,}9$
  - prawdopodobieństwa pomyślnego wykonania ćwiczenia przez jednego sportowca $0{,}5$. Dwaj sportowcy, po dwa podejścia
  - prawdopodobieństwo co najmniej jednego trafienia tarczy przy trzech strzałach $0{,}875$
  - strzelec trafia do celu z prawdopodobieństwem $0{,}4$. Ile strzałów, by trafić z prawdopodobieństwem nie mniej niż $0{,}9$?

Dodawanie prawdopodobieństw dwóch zdarzeń

- zdarzenia A i B są *niewyłaczające się* — zajście jednego nie wyklucza zajścia drugiego
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - niezależne: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$
  - zależne: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B|A)$
  - wyłączające się: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- przykłady:
  - strzelec strzela do tarczy podzielonej na trzy pola, prawdopodobieństwo trafienia do pierwszych dwóch odpowiednio $0{,}45$, $9{,}35$. Prawdopodobieństwo trafienia do pierwszego lub drugiego?
  - z talii 52 kart losujemy jedną. Prawdopodobieństwo wylosowania asa lub trefla?

Dodawanie prawdopodobieństw kilka zdarzeń

- $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \cdots - P(A_{n-1} \cap A_n) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots P(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$
- przykłady:
  - na loterii jest 1000 losów z wygranymi: 1 za 500 zł, 10 po 100 zł, 50 po 20 zł, 100 po 5 zł. Prawdopodobieństwo tego, że jeden los wygrywa co namniej 20 zł?
  - trzej myśliwi jednocześnie strzelili do zająca. Prawdopodobieństwo zabicia jednym strzałem jest $\frac{1}{3}$. Jakie jest prawdopodobieństwo zastrzelenia zająca?
  - samolot ma trzy silniki. Prawdopodobieństwo uszkodzenia silników odpowiednio $0{,}0001$, $0{,}0012$ oraz $0{,}0002$. Zdarzenia są niezależne. Jakie jest prawdopodobieństwo uszkodzenia (dokładnie) jednego silnika?

Prawdopodobieństwo całkowite

- Dany jest *układ zupełny* zdazeń $B_1, B_2, \ldots B_n$.
  - wyłączające się parami, a suma jest zdarzeniem pewnym
- Niech zdarzenie A może zajśćm tylko jeżeli zajdzie jedno z B_i
- Wtedy $P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n)$
- Przykład:
  - Prawdopodobieństwo tego, że w czasie pracy maszymy elektoricznej nastąpi awaria arytmometru, pamięci lub innych urządzeń, mają się do siebie jak 3:2:5. Prawdopodobieństwa wykrycia awarii w arytmometrze, panięci oraz innych urządzeniach wynoszą $0{,}8$, $0{,}9$, $0{,}9$. Prawdopodobieństwo tego, że awaria zostanie wykryta?

Wzór Bayesa

- Niech zaszło zdarzenie A, które jest skutkiem jednego ze zdarzeń układu pełnego B_i
- Nie wiadomo, które z B_i spowodowało A. B_i nazywamy *hipotezami*
- Wzór Bayesa:
  $P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)}$
- Przykład:
  - Przy badaniu narkomana test wypada pozytywnie w 99% przypadków, zaś przy badaniu osoby nie zażywającej narkotyków wypada negatywnie w 99% przypadków. Pewna firma postanowiła przebadać swoich pracowników takim testem wiedząc, że 0,5% z nich to narkomani. Chcemy obliczyć prawdopodobieństwo, że osoba u której test wypadł pozytywnie rzeczywiście zażywa narkotyki.